

TEORIE VOLNÉHO TVAROVÁNÍ TENKOSTĚNNÝCH ROTAČNÍCH SKLENĚNÝCH NÁDOB

JAROSLAV MENČÍK

Vysoká škola strojní a textilní, Hádkova 6, 461 17 Liberec

Došlo 19. 8. 1981

Jsou uvedeny obecné vztahy mezi zatížením a okamžitou rychlostí deformování tenkostěnných rotačních nádob z viskózních látek, zatížených rotačně symetricky. K odvození bylo využito analogie s chováním pružných skořepin. Řešení se podstatně zjednoduší, jestliže je možno zanedbat vliv ohybových momentů a použít tzv. membránové teorie. Tato teorie je v práci podrobně rozvedena a jsou uvedeny podmínky její použitelnosti. Dále je naznačen obecný způsob výpočtu, spočívající v postupném určování přírůstků deformací v krátkých časových intervalech. V závěru jsou diskutovány obecné zákonitosti z teorie plynouct.

ÚVOD

V práci [1] byly odvozeny vztahy pro výpočet deformací a napětí při tvarování jednoduchých těles (tyčí, trubíc atd.) z viskózních látek, jako je např. žhavá sklovina. Zde si všimneme volného tvarování tenkostěnných rotačních¹⁾ nádob, resp. dutých těles, s obecným tvarem meridiánu, při rotačně symetrickém zatížení. Volným tvarováním budeme rozumět případ, kdy je pevně držena pouze malá část tělesa a žádný jiný předmět deformování nebrání. Nový tvar vzniká účinkem vlastní tíhy, povrchového napětí, vnitřního přetlaku a případně dalších sil. Spadá sem tedy nejen ruční tvarování, ale také např. celý interval z lisofoukacího procesu, během něhož se polotovar nedotýká formy buď vůbec, nebo pouze ve velmi omezené míře.

Sklovinu při tvarování můžeme přibližně považovat za nestlačitelnou viskózní (newtonskou) kapalinu, u které platí přímá úměra mezi působícími napětími a rychlostmi poměrných deformací

$$\tau = \eta \dot{\gamma}, \quad \sigma = 3\eta \dot{\epsilon}, \quad (1)$$

kde τ , σ je smykové a normální napětí, $\dot{\gamma} = d\gamma/dt$, $\dot{\epsilon} = d\epsilon/dt$ je rychlost poměrného posouvání a poměrného prodlužování, a η je koeficient dynamické viskozity ve smyku.

Vztahy (1) jsou analogické výrazům pro deformování pružných (hookeovských) látek, u kterých jsou napětí přímo úměrná poměrným deformacím, tzn. $\tau = G\dot{\gamma}$, $\sigma = E\dot{\epsilon}$ (přičemž $E = 2(1 + \mu)G$), kde E a G jsou moduly pružnosti ve smyku a v tahu a μ je součinitel příčné kontrakce (Poissonova konstanta). Tato viskoelastická analogie umožňuje řešit četné úlohy o deformování viskózních těles metodami nauky o pružnosti a přejímat hypotézy o charakteru deformování nebo již hotové výsledky s tím, že modulu pružnosti odpovídá koeficient viskozity a deformaci pružného tělesa odpovídá okamžitá rychlost deformování tělesa viskózního, přičemž s ohledem na nestlačitelnost platí $\mu = 0,5$ [1], [2].

¹⁾ Předpokládáme, že i tloušťka stěny a viskozita jsou rozloženy rotačně symetricky.

V našem případě tvarování nádob z viskózní skloviny vyjdeme z teorie pružných skořepin [3], [4]. Uvedeme zde základní vztahy pro stanovení sil a okamžitých rychlostí deformování a naznačíme celkový postup výpočtu.

ZÁKLADNÍ VZTAHY

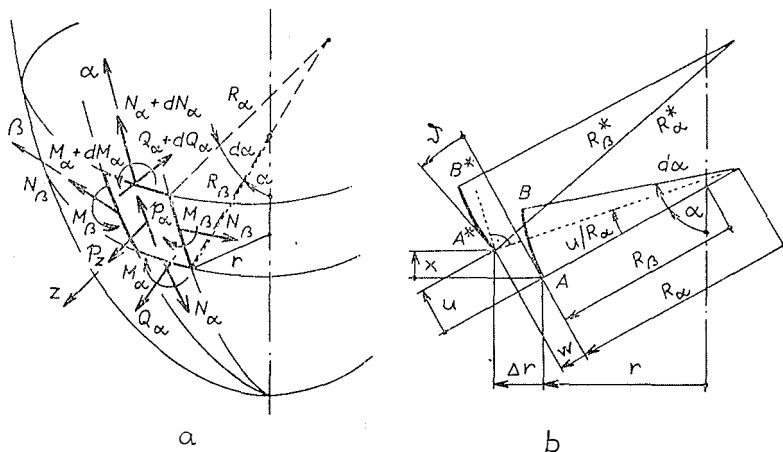
Za rotační tenkostěnné nádoby budeme považovat dutá rotační tělesa uzavřená nebo otevřená, se stěnou zakřivenou v rovnoběžkovém i v meridiánovém směru, pro která přibližně platí

$$h/R_{\min} < 1/10, \quad (2)$$

kde h je tloušťka stěny a R_{\min} nejmenší poloměr křivosti střední plochy²⁾. Je-li splněna podmínka (2), můžeme přijmout následující zjednodušující předpoklady, obvyklé v teorii tenkých pružných skořepin:

a) Poloha libovolného bodu je dostatečně popsána souřadnicemi odpovídajícího bodu na střední ploše a kolmou vzdáleností od ní. Deformace nádoby můžeme vyjádřit pomocí deformací střední plochy.

b) Při sestavování vztahů pro výpočet sil a deformací se zanedbají vůči jednotce členy velikosti řádu h/R a menší.



Obr. 1. Tenkostěnná rotační nádoba zatížená rotačně symetricky: a) Celkový pohled, souřadný systém, působící síly a momenty. b) Deformování meridiánu nádoby. AB — diferenciální element před deformací, A^*B^* — element po deformaci během intervalu dt .

c) Normální napětí kolmá ke střední ploše jsou zanedbatelná proti normálním napětím působícím ve směrech rovnoběžných s touto plochou.

d) Rychlost deformování (resp. tečení) v libovolném místě se mění napříč stěnou lineárně, popř. je konstantní³⁾.

Na obr. 1a je schematicky znázorněna část rotační nádoby s vyznačením souřadného systému a působících sil. Vnější zatížení nádoby (vlastní tíha, vnitřní

²⁾ V prvním přiblížení můžeme předpokládat, že střední plocha leží uprostřed mezi vnitřním a vnějším povrchem nádoby (viz dále).

³⁾ Zanedbává se deformování příčného průřezu vlivem smykových napětí, resp. smýkání vrstev po sobě. (Odpovídá to hypotéze o zachování rovinnosti průřezů u elastických skořepin.)

přetlak atd.) vyvolává vnitřní síly a momenty, jejichž působením se nádoba deformuje. Jednotlivé body se posouvají a dochází ke změně délek a křivosti střední plochy. Analogicky k teorii pružných skořepin [3], [4] můžeme odvodit následující vztahy mezi okamžitými rychlostmi posuvů bodů střední plochy a rychlostmi poměrných deformací:

Rychlost poměrného prodlužování střední plochy v meridiálním a obvodovém směru

$$\dot{\varepsilon}_\alpha = \left(\frac{ds^* - ds}{ds} \right) \cdot = \frac{d\dot{u}}{ds} + \frac{\dot{w}}{R_\alpha}, \quad \dot{\varepsilon}_\beta = \left(\frac{r^* - r}{r} \right) \cdot = \frac{1}{r} (\dot{u} \cos \alpha + \dot{w} \sin \alpha), \quad (3)$$

rychlost pootáčení tečny k meridiánu

$$\dot{\varphi} = -\frac{\dot{u}}{R_\alpha} + \frac{d\dot{w}}{ds} \quad (4)$$

a rychlost zmenšování křivosti střední plochy v meridiálním a obvodovém směru

$$\dot{\kappa}_\alpha = -\left(\frac{1}{R_\alpha^*} - \frac{1}{R_\alpha} \right) \cdot = \frac{d\dot{\varphi}}{ds}, \quad \dot{\kappa}_\beta = -\left(\frac{1}{R_\beta^*} - \frac{1}{R_\beta} \right) \cdot = \frac{1}{r} \dot{\varphi} \cos \alpha, \quad (5)$$

kde R_α , R_β představují okamžité hodnoty poloměrů křivosti v meridiálním a obvodovém směru,

$$r = R_\beta \sin \alpha \quad (6)$$

je poloměr rovnoběžkové kružnice, $\dot{u} = du/dt$, $\dot{w} = dw/dt$ jsou okamžité rychlosti pohybu bodů střední plochy ve směru tečny k meridiánu a normály ke střední ploše, a $ds = R_\alpha d\alpha$ je diferenciální úsek meridiánu. Kladné smysly posuvů a pootáčení jsou vyznačeny na obr. 1b, hvězdička označuje rozměr po proběhnutí časového intervalu dt , tečka označuje derivaci podle času⁴⁾.

Rychlosti poměrného prodlužování se týkaly střední plochy. Pro vrstvu ve vzdálenosti z platí v souladu s předpokladem d) a s obr. 1b

$$\dot{\varepsilon}_\alpha(z) = \dot{\varepsilon}_\alpha - z\dot{\kappa}_\alpha, \quad \dot{\varepsilon}_\beta(z) = \dot{\varepsilon}_\beta - z\dot{\kappa}_\beta. \quad (7)$$

Při deformování nádoby dochází též ke změně tloušťky stěny, přičemž s ohledem na nestlačitelnost platí

$$\dot{\varepsilon}_z(z) + \dot{\varepsilon}_\alpha(z) + \dot{\varepsilon}_\beta(z) = 0. \quad (8)$$

V souladu s předpokladem c) je $\sigma_z = 0$, takže napjatost ve stěně nádoby je dvojosá a napětí σ_α , σ_β jsou dána vztahy⁵⁾

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(z) &= 4\eta(z) [\dot{\varepsilon}_\alpha(z) + 0,5\dot{\varepsilon}_\beta(z)] \\ \sigma_\beta(z) &= 4\eta(z) [\dot{\varepsilon}_\beta(z) + 0,5\dot{\varepsilon}_\alpha(z)]. \end{aligned} \quad (9)$$

Při výpočtu deformací tenkostěnných nádob je vhodnější než s napětími pracovat s vnitřními silami a momenty, vztahenými na jednotku délky střední plochy.

⁴⁾ Změnu rozměru během intervalu dt vztahujeme vždy ke střední hodnotě tohoto rozměru v daném intervalu, kterou považujeme za konstantní; na člen ds ve jmenovateli výrazu (3) atd. se tedy derivace podle času nevztahuje. Vzorec pro stanovení okamžitých rychlostí poměrných deformací viskózního tělesa prostě obdržíme, jestliže ve vztazích pro poměrné deformace tělesa elastického zaměníme posuvy atd. jejich rychlostmi.

⁵⁾ Jde o analogii s Hookeovým zákonem pro rovinnou napjatost elastických těles [5]: $\sigma_\alpha = (\varepsilon_\alpha + \mu\varepsilon_\beta)E / (1 - \mu^2)$ atd. K viskózním látkám přejdeme, zaměníme-li poměrné deformace jejich rychlostmi a modul pružnosti E výrazem 3η , a přihlídneme-li k nestlačitelnosti (tzn. $\mu = 0,5$) a k tomu, že viskozita může záviset na poloze.

V našem případě rotačně symetrického zatížení, o složkách p_a (Nm^{-2}) ve směru tečny k meridiánu a p_z ve směru normály ke střední ploše, působí v řezu $\alpha = \text{konst}$ jednotková normálná síla N_a a jednotková příčná síla Q_a (obě o rozměru Nm^{-1}) a jednotkový ohybový moment M_a (o rozměru $\text{Nm/m} = \text{N}$). V řezu $\beta = \text{konst}$ působí N_β , M_β ⁶⁾. Tyto síly a momenty (kladné smysly viz obr. 1a) dostaneme jako výslednice vnitřních napětí, k nimž v našem případě přiřadíme i povrchové napětí γ (nezaměňovat se smykovou deformací!). Při odvozování vyjdeme ze vztahů (9) a (7), v souladu s předpokladem b) zanedbáme, že šířka vrstev u vnějšího povrchu nádoby je obecně jiná než u vnitřního povrchu, a dále přihlídneme k tomu, že tzv. střední plocha je definována (analogicky k neutrální ose při ohybu tyčí [1]) jako plocha, k níž nedávají ohybová napětí žádnou výslednici, takže platí

$$\int_{(h)} \eta(z) z \dot{\epsilon} dz = \int_{(h)} \eta(z) z dz = 0. \quad (10)$$

Dostaneme potom

$$\begin{aligned} N_a &= \int_{(h)} \sigma_a(z) dz + 2\gamma = 4 \int_{(h)} \eta(z) [\dot{\epsilon}_a + 0,5\dot{\epsilon}_\beta] dz + 2\gamma \\ N_\beta &= \int_{(h)} \sigma_\beta(z) dz + 2\gamma = 4 \int_{(h)} \eta(z) [\dot{\epsilon}_\beta + 0,5\dot{\epsilon}_a] dz + 2\gamma \\ M_a &= - \int_{(h)} \sigma_a(z) z dz = 4 \int_{(h)} \eta(z) z^2 [\dot{\epsilon}_a + 0,5\dot{\epsilon}_\beta] dz \\ M_\beta &= - \int_{(h)} \sigma_\beta(z) z dz = 4 \int_{(h)} \eta(z) z^2 [\dot{\epsilon}_\beta + 0,5\dot{\epsilon}_a] dz. \end{aligned} \quad (11)$$

Zavedeme-li tzv. tuhost v tahu

$$D = 4 \int_{(h)} \eta(z) dz = 4\eta_{ST}h \quad (12)$$

a tuhost v ohybu

$$B = 4 \int_{(h)} \eta(z) z^2 dz = \frac{4}{3} \eta_{SO}h^3, \quad (13)$$

kde η_{ST} a η_{SO} jsou střední viskozity v průřezu při tahu nebo při ohybu⁷⁾, můžeme vzorce (11) zapsat ve tvaru

$$N_a = D(\dot{\epsilon}_a + 0,5\dot{\epsilon}_\beta) + 2\gamma, \quad N_\beta = D(\dot{\epsilon}_\beta + 0,5\dot{\epsilon}_a) + 2\gamma \quad (14)$$

$$M_a = B(\dot{\epsilon}_a + 0,5\dot{\epsilon}_\beta), \quad M_\beta = B(\dot{\epsilon}_\beta + 0,5\dot{\epsilon}_a). \quad (15)$$

Vnitřní síly a momenty musí být v rovnováze s vnějším zatížením. V našem případě můžeme sestavit podmínku rovnováhy sil, působících na diferenciální element nádoby ve směru tečny k meridiánu (16) a normály ke střední ploše (17), a podmínku rovnováhy momentů (18). V souladu s obr. 1a dostaneme po úpravě [3, 4]

$$\frac{d}{ds} (N_z r) - N_\beta \cos \alpha - Q_a r / R_a = -p_a r \quad (16)$$

⁶⁾ Při spojitém zatížení ve směru tečny k rovnoběžkové kružnici se dále objeví podélné smykové síly $N_{a\beta}$ a jim příslušné deformace. Nesymetrické zatížení vyvolá navíc příčné síly Q_β a kroutivé momenty $M_{a\beta}$, viz např. [3, 4].

⁷⁾ Způsob výpočtu středních viskozit vyplývá ze vztahů (12), (13).

$$\frac{d}{ds}(Q_{\alpha r}) + N_{\beta} \sin \alpha + N_{\alpha r}/R_{\alpha} = p_z r \quad (17)$$

$$\frac{d}{ds}(M_{\alpha r}) - M_{\beta} \cos \alpha - Q_{\alpha r} = 0. \quad (18)$$

Podmínky rovnováhy (16)—(18), silově deformační podmínky (14), (15) a geometrické deformační podmínky (3)—(5) představují základní soustavu rovnic deformování viskózních rotačních tenkostěnných nádob zatížených rotačně symetricky. Řešením této soustavy získáme okamžitou rychlost deformování, jejíž integrací podle času potom dostaneme celkovou změnu tvaru.

PŘIBLIŽNÉ ŘEŠENÍ PODLE MEMBRÁNOVÉ TEORIE

Způsob výpočtu rychlostí deformování a jeho pracnost závisí podstatně na tvaru tělesa a charakteru zatížení. Úloha je poměrně snadná, jde-li o homogenní těleso tvaru duté koule, kužele, trubice nebo dokonce rovné desky, neboť v takovém případě můžeme převzít již hotové výsledky z teorie pružných skořepin a desek, viz např. [3], [4], [5]. Bohužel tyto výsledky platí pouze pro velmi malé deformace. Při tvarování skleněných nádob, resp. těles, se však obvykle vyskytují právě větší deformace a obecné tvary meridiánu. Přesné řešení v takovém případě bývá velmi složité. Klasický postup spočívá v tom, že postupnou eliminací neznámých v rovnicích (3)—(5) a (14)—(18) dospějeme buď ke dvěma simultánním diferenciálním rovnicím (až 3. řádu) pro rychlosti posuvů u , w , nebo k jedné diferenciální rovnici 4. řádu pro rychlost pootáčení meridiánu $\dot{\vartheta}$ [3], [4]. Výsledná rovnice je při obecném tvaru meridiánu velice komplikovaná (obsahuje též derivace poloměrů křivosti a popř. i tuhostí) a lze ji řešit pouze numericky. Protože nejsou známy všechny okrajové podmínky ve vhodném tvaru (vyšší derivace $\dot{\vartheta}$), je k tomu nutno užít iteračních a jiných postupů.

Jako vhodnější se jeví variační metody, zejména metoda konečných prvků. Tato metoda umožňuje s velkou přesností vyšetřovat tělesa složitých tvarů a s nehomogenními vlastnostmi. Vyžaduje však výkonný samočinný počítač, a proto její použití zůstane omezeno pouze na některé případy. Pro získání přibližné představy často vystačíme s méně přesným, avšak podstatně jednodušším řešením podle tzv. membránové teorie, jíž si zde všimneme podrobněji.

V případě, že

1. na nádobu působí pouze spojité zatížení,
2. křivost střední plochy⁸⁾ i tuhost se mění podél meridiánu pouze zvolna,
3. vnější spojité zatížení okraje (reakce) má směr tečny k meridiánu, vymizí prakticky příčné smykové síly Q_{α} a ohybové momenty M_{α} , M_{β} , a napjatost je představována pouze normálními silami N_{α} , N_{β} , označovanými též jako síly membránové⁹⁾, jejichž hodnoty vyplynou přímo z podmínek rovnováhy.

Oddělíme-li myšleným řezem $\alpha = \text{konst}$ část nádoby a sestavíme podmínku rovnováhy sil v osovém směru, dostaneme

$$N_{\alpha} = \frac{P}{2\pi r \sin \alpha}, \quad (19)$$

⁸⁾ Máme na mysli křivost v matematickém smyslu. Přísně vzato, např. i u válcové nádoby s půlkulovým dnem je v místě přechodu velmi prudká změna křivosti meridiánu.

⁹⁾ Chování takto zatížená nádoby připomíná membránu; odtud i název teorie.

kde $P = P(\alpha)$ je výslednice vnějšího zatížení (vlastní tíha, vnitřní přetlak atd.), působícího na oddělenou část¹⁰⁾. Sílu N_β potom určíme z výrazu (17), který přejde na tzv. Laplaceovu rovnici, uváděnou obvykle ve tvaru

$$\frac{N_\alpha}{R_\alpha} + \frac{N_\beta}{R_\beta} = p_z. \quad (20)$$

Nyní si všimneme deformací. Úpravou vztahů (14) dostaneme okamžité rychlosti poměrného prodlužování v meridiánovém a obvodovém směru

$$\dot{\varepsilon}_\alpha = \frac{4}{3D}(N_\alpha - 0,5N_\beta - \gamma), \quad \dot{\varepsilon}_\beta = \frac{4}{3D}(N_\beta - 0,5N_\alpha - \gamma). \quad (21)$$

Okamžitá rychlost posuvu ve směru normály ke střední ploše bude podle (3) s přihlédnutím k (6)

$$\dot{w} = R_\beta \dot{\varepsilon}_\beta - \dot{u} \cotg \alpha, \quad (22)$$

kde rychlost posuvu ve směru tečny k meridiánu dostaneme řešením diferenciální rovnice, plynoucí z (3)

$$\frac{d\dot{u}}{ds} = \frac{\dot{u} \cotg \alpha}{R_\alpha} + \dot{\varepsilon}_\alpha - \dot{\varepsilon}_\beta \frac{R_\beta}{R_\alpha}, \quad (23)$$

přičemž $\dot{\varepsilon}_\alpha$, $\dot{\varepsilon}_\beta$ vyjádříme prostřednictvím vztahů (21), (20) a (19).

Rychlost zvětšování poloměru rovnoběžkové kružnice je

$$\dot{r} = r \dot{\varepsilon}_\beta = \frac{4r}{3D}(N_\beta - 0,5 N_\alpha - \gamma), \quad (24)$$

pro rychlost posuvu bodů střední plochy ve směru osy rotace platí

$$\dot{x} = \dot{u} \sin \alpha - \dot{w} \cos \alpha, \quad (25)$$

a rychlost změny tloušťky stěny nádoby určíme ze vztahu

$$\dot{h} = h \dot{\varepsilon}_z = -h(\dot{\varepsilon}_\alpha + \dot{\varepsilon}_\beta) = -\frac{2h}{3D}(N_\alpha + N_\beta - 4\gamma). \quad (26)$$

Toto byl případ čistě membránové napjatosti. V řadě případů však nebývají splněny všechny potřebné podmínky, zejména podmínka 3: okraj nádoby je často „pevný“ a nemůže se volně deformovat. Kromě sil N_α , N_β se potom objeví i příčná síla Q_α a ohybové momenty M_α, M_β . Jak ale ukázal podrobný rozbor, prováděný na elastických nádobách [3], [4], [5], jsou tyto ohybové účinky omezeny pouze na blízké okolí okraje. Např. u válcové, kuželové nebo kulové¹¹⁾ nádoby s dostatečnou délkou meridiánu lze průběh Q_α , M_α , M_β (a rovněž průběh deformací, těmito silami a momenty vyvolaných) vyjádřit přibližně závislostí typu

$$A(s) = A_0 e^{-ks} \cos(ks + \varphi), \quad (27)$$

kde A_0 je hodnota veličiny na okraji nádoby, s je vzdálenost uvažovaného místa od okraje, φ je určitý parametr, a k je koeficient útlumu, pro který platí

$$k = \sqrt[4]{3(1 - \mu^2)} / \sqrt{R_\beta h} \doteq 1,225 / \sqrt{R_\beta h}, \quad (28)$$

¹⁰⁾ Vztah (19) dostaneme též integrací upravené rovnice (16).

¹¹⁾ S výjimkou velmi mělkých misek.

kde R_β je poloměr křivosti (v obvodovém směru) v místě okraje, h tloušťka stěny a μ ($= 0,5$) Poissonova konstanta.

Ze vztahů (27) a (28) vyplývá, že např. ve vzdálenosti od okraje $s = 2,5 \sqrt{R_\beta h}$ poklesnou amplitudy jednotlivých veličin na méně než 5% své maximální hodnoty. To znamená, že se zde vliv okrajů, resp. upevnění nádoby již prakticky neprojeví a velikost deformací bude stejná, jako kdyby byla způsobena čistě membránovou napjatostí. Při řešení konkrétních úloh (se splněnými podmínkami 1, 2) proto můžeme použít membránové teorie s tím, že výsledky budou dostatečně přesné ve větších vzdálenostech od okrajů, zatímco poměry blízko okrajů je nutno odhadnout.

PRAKTICKÁ ČÁST

Při určování deformací v konkrétních případech vycházíme ze známého nebo předpokládaného tvaru nádoby, rychlosti deformování a rozdělení viskozit v určitém počátečním okamžiku, a dále z charakteru zatížení a popř. i z podmínky pro sdílení tepla. S výjimkou nejjednodušších případů je celé řešení nutno provádět numericky. Vyšetřovaný časový interval rozdělíme na kroky Δt tak krátké, abychom mohli předpokládat, že během každého kroku zůstávají rozměry tělesa, rychlost deformování, zatížení i viskozita přibližně konstantní. Na základě znalosti jednotlivých veličin na začátku určitého časového kroku stanovíme jejich změny a odpovídající hodnoty na konci tohoto kroku. Celý proces tak sledujeme postupně, krok za krokem [1].

Při numerickém výpočtu změn tvaru tělesa během určitého časového kroku postupujeme následujícím způsobem: Nádobu rozdělíme na řadu prstenců šířky $\Delta s = R_a \Delta \alpha$. Potom určíme charakteristické hodnoty jednotlivých prstenců v daném kroku. Konstanty α , R_a stanovujeme vždy pomocí vhodného podprogramu, prokládajícího např. kružnici třemi sousedními uzlovými body. Tuhost, resp. střední viskozitu, počítáme v souladu s požadavky na celkovou přesnost výpočtu [1]. V nejnáročnějších případech nestacionárního vedení tepla rozdělíme těleso sítí a určujeme teploty v jednotlivých uzlech a z nich potom přepočtem a numerickou integrací střední viskozitu a tuhost každého prstence. Protože jde o tenkostěnnou nádobu volně tvarovanou, můžeme často zanedbat vliv nerovnoměrného rozdělení teplot v průřezu, a pracovat pouze se středními teplotami, jejichž časový průběh získáme např. tak, že aproximujeme vhodnou závislostí experimentální údaje. Při předběžné analýze dostaneme užitečné výsledky i za předpokladu konstantní viskozity.

Jakmile známe konstanty α , R_a , R_β , D , určíme v daném kroku síly N_a a N_β , působící v jednotlivých prstencích. (Zpravidla jde o účinek vlastní tíhy a vnitřního přetlaku; někdy též působí další osová síla a u rotujících těles též síla odstředivá.) Potom stanovíme rychlosti posuvů \dot{u} , \dot{w} (přičemž diferenciální rovnici (23) pro výpočet \dot{u} musíme rovněž integrovat numericky) a rychlosti zvětšování průměru \dot{r} a posuvu v osovém směru \dot{x} . Dosažením rychlostí do vztahů typu

$$l_k = l_{k-1} + \dot{l}_k \Delta t \quad (29)$$

dostaneme výsledné rozměry na konci (k -tého) časového kroku. Potom přejdeme k dalšímu kroku a celý postup opakujeme.

DISKUSE

Teorie uvedená v této práci nemá význam pouze pro matematické modelování tvarovacích procesů, ale přispívá i k lepšímu pochopení jednotlivých souvislostí. Z analýzy základních vztahů vyplývají následující poznatky:

- Rychlost poměrné změny rozměru je nepřímo úměrná tuhosti průřezu v tahu, resp. střední viskozitě a tloušťce stěny.
- Tuhost má vliv pouze na rychlost probíhajícího procesu, nikoliv na jeho charakter; poměry mezi rychlostmi $\dot{\epsilon}_a$, $\dot{\epsilon}_\beta$, $\dot{\epsilon}_z$ na tuhosti nezávisí.
- Rychlosti poměrných deformací jsou úměrné působícím silám; přitom síla kolmá ke směru, v němž deformaci vyšetřujeme, má vždy opačný a poloviční účinek než síla (stejného smyslu a velikosti) působící v daném směru.
- Poměrná rychlost zeslabování stěny nádoby je rovna součtu poměrných rychlostí prodlužování střední plochy v meridiánovém a obvodovém směru.
- Je-li deformování v určitém směru bráněno, vnáší se do tělesa další síly, čímž se ovlivní deformace i ve směrech zbývajících.
- Lokální narušení podmínek volného deformování nádoby (např. na okraji) má za následek vznik ohybových napětí, jejichž účinek je však omezen na poměrně úzkou oblast.

Rozbor vlivu různých zatížení vede k těmto závěrům:

- Vnější osová tahová síla má za následek prodlužování meridiánu a zmenšování průměru nádoby; tlaková síla má účinek opačný.
- Vlastní tíha (a podobně i setrvačné síly při pohybu proměnlivou rychlostí) působí podobně jako osová síla (u zavěšené nádoby tahová, u podepřené, resp. stojící nádoby tlaková). Její účinek je však obecně tím větší, čím blíže je uvažované místo k upevněnému okraji.
- Odstředivá síla u rotující nádoby vede ke zvětšování průměru a ke zkracování v osovém směru.
- Působením vnitřního přetlaku se nádoba prodlužuje v osovém směru a celkově se snaží zaujmout kulový tvar.
- Povrchové napětí (jež se uplatní spíše u těles malé hmotnosti) má na následek smršťování střední plochy v meridiálním i obvodovém směru (přičemž rychlosti poměrných deformací jsou v obou směrech stejné) a zvětšování tloušťky stěny.
- Výsledné rychlosti deformování se získají superpozicí účinků jednotlivých zatížení.

SHRNUTÍ

Obsahem práce je teorie volného tvarování tenkostěnných rotačně symetrických nádob z viskózních (newtonských) látek. Jsou uvedeny základní vztahy, naznačen postup výpočtu a diskutovány obecné poznatky. Uvedená teorie přispívá k lepšímu pochopení tvarovacích procesů a může se uplatnit při matematickém modelování.

Literatura

- [1] Menčík J.: *Silikáty* 26, 115 (1982).
- [2] Menčík J.: *Sklář a keram.* 29, 364 (1979).
- [3] Placák V., Kunc J.: *Výpočet napjatosti skořepin*. SNTL, Praha 1966.
- [4] Timoshenko S., Woinowski-Krieger S.: *Theory of Plates and Shells*. Mc Graw-Hill, New York-Toronto-London 1959. (Ruský překlad: *Пластинки и оболочки*. Наука, Moskva 1966).
- [5] Höschl C.: *Pružnost a pevnost ve strojírenství*. SNTL, Praha 1971.

ТЕОРИЯ СВОБОДНОГО ФОРМОВАНИЯ
ТОНКОСТЕННЫХ СТЕКЛЯННЫХ СОСУДОВ ВРАЩЕНИЯ

Ярослав Менčíк

Машиностроительный и текстильный институт, Либерец

В работе приводятся общие соотношения между внутренними силами и мгновенными скоростями деформаций тонкостенных сосудов вращения или полых тел из вязких жидкостей, как например стекломасса, нагруженных симметрично относительно оси. Для выведения пользовались аналогией поведения упругих оболочек. Решение существенно упрощается, если нагружающие силы расположены непрерывно, а кривизна срединной поверхности и жесткость изменяется вдоль меридиана только медленно. В таком случае можно пренебрегать влиянием изгибающих моментов, и использовать мембранную теорию. Упомянутая теория в работе подробно рассматривается, причем учитывается тоже влияние укрепления краев сосуда. Приводится общий метод расчета, заключающийся в том, что рассматриваемый отрезок времени подразделяется на краткие интервалы и постепенно определяются изменения формы в каждом из них. В заключение рассматриваются общие закономерности, вытекающие из теории.

*Рис. 1. Тонкостенный сосуд вращения, нагруженный симметрично относительно оси: а) общий вид, координатная система, действующие силы и моменты; б) деформирование меридиана, АВ — дифференциальный элемент до деформации, А*В* — элемент после деформации во время интервала dt.*

THE THEORY OF FREE FORMING
OF THIN-WALLED ROTARY GLASS CONTAINERS

Jaroslav Menčík

The College of Mechanical and Textile Engineering, Liberec

The study deals with general relationships between the internal forces and the instantaneous rates of deformation of thin-walled rotary containers or hollow bodies made of viscous liquids, such as hot glass, loaded rotation-symmetrically. In the derivation, use was made of the analogy with the behaviour of elastic shells. The solution is substantially simplified when the loading forces are distributed continuously, and the curvature of the middle plane and rigidity undergo only slow changes along the meridian. In such cases it is possible to neglect the effect of bending moments and to use the so-called membrane theory. This theory has been developed here in detail, with taking into account the effect of supporting the vessel edges. The suggested general computation procedure is based on dividing the period of time investigated into short intervals and on determining step by step the changes in shape taking place within each of these intervals. The conclusion presents a general discussion of the general rules following from the theory.

Fig. 1. A thin-walled rotary container loaded rotation-symmetrically:
a) General view, coordinate system, forces and moments;
b) Deformation of the meridian. АВ — the differential element before deformation, А*В* — element after deformation within interval dt.