

## MATEMATICKÝ MODEL TAVENÍ KMENE V ELEKTRICKÝCH PECÍCH

## Část I. Teoretické vztahy modelu

PETR SCHILL

Státní výzkumný ústav sklářský, Škroupova 957, 501 92 Hradec Králové

Došlo 2. 4. 1981

*Je vypracován stacionární jednorozměrný matematický model tavení vrstvy kmene se spodním ohřevem při použití proměnných materiálových veličin a spojitého tepelného propadu. Model uvažuje rovněž kinetiku tavení, a to zavedením obecného stupně přeměny, jenž je konkrétně určen z TG neizotermního měření. Modelová rovnice je sestavena na základě energetických a hmotnostních bilancí v kondenzované a plynné fázi pohybující se vrstvy kmene. Pro proměnné materiálové veličiny a průběh tepelného propadu jsou uvedeny konkrétní tvary aproximačních materiálových funkcí.*

## 1. KONCEPCE MODELU

Přeměna kmene na sklovinu v celoelektrických hlubinných pecích probíhá od povrchu zakládané vrstvy vertikálním směrem k rozhraní, ze kterého se odvádí vzniklá tavenina k dalšímu technologickému zpracování. Průběh této přeměny lze z fyzikálního makroskopického hlediska popsat pomocí jednorozměrného idealizovaného systému, na jehož vstup se přivádí látka v práškovém stavu. Uvnitř probíhá její spojitá makroskopicky endotermická přeměna na taveninu, odváděnou na výstupu, který je určen ukončením sledovaných přeměn. Potřebná transformační a reakční energie je přiváděna ze strany výstupu, tj. ze vzniklé taveniny, ve které jsou umístěny elektrody jako energetické zdroje.

Vlastní průběh transformace práškového kmene na taveninu je možné vystihnout makroskopickým stupněm přeměny  $\alpha$ , který spolu s teplotou  $T$  tvoří nezávisle proměnné veličiny v obecných konstitutivních a kinetických rovnicích. Z praktického hlediska jsou pro modelování však vhodné pouze dva speciální stupně přeměny, a to plynný  $\alpha_g$  a energetický  $\alpha_e$ , které lze v určitém přiblížení experimentálně stanovit z neizotermních TG a DTA měření (oba jsou potom obecně funkcemi  $\alpha$  a  $T$ ). Vzhledem k tomu, že při tavení běžných sklářských kmenů jsou hlavní energeticky zabarvené chemické reakce doprovázeny současným vývinem plynů, přičemž navíc z průběhu křivek DTG a DTA plyne přibližný vztah  $\alpha_e \sim \alpha_g$ , byl v konečné modelové fázi pro popis kinetiky zvolen plynný stupeň přeměny, tedy  $\alpha = \alpha_g$ , jenž je v oblasti prakticky využitelných rychlostí ohřevu kmene (setdiny, max. desetiny  $K s^{-1}$ ) pouze funkcí teploty  $T$ . Tento teoretický předpoklad byl autorem experimentálně ověřován v práci [1].

Z hlediska spotřeby energie lze celou vrstvu rozdělit na dvě oblasti, a to předehřívací zónu, kde dochází pouze k odpařování vody (volné i vázané po předchozí dehydrataci) a k ohřevu, a na tavnou zónu, ve které již od pevného stavu probíhají všechny potřebné transformace a reakce. Teplotní rozhraní obou zón lze stanovit přibližně hodnotou  $T_R = 350^\circ C$ , která plyne jak z rozborů reakcí [2], [3], [4], tak i z DTA a TG měření [1], [2]. Dověšení přeměny kmene na taveninu, jež je lokalizováno do místa rozhraní  $x = 0$ , kde  $\alpha = 1$ , je modelově definováno ukončením všech významných chemických reakcí a je možné jej na základě výše uvedených

prací opět i teplotně charakterizovat, a to přibližnou teplotou  $T_G = 1000^\circ\text{C}$ . Přesně určení rozhraní mezi kmenem a taveninou je však ve skutečnosti dosud nevyřešený problém komplikovaný mnoha doprovodnými a následnými jevy, jako je uzavírání pórovitosti, vznik a chování primárních i sekundárních bublin, rozpouštění zbylých zrn písku apod. Pro modelování tavení kmene je však nutno toto neurčité rozhraní specifikovat, což je v této práci aproximativně provedeno výše uvedeným způsobem.

Vlastní matematický model představují jednorozměrné stacionární diferenciální rovnice sdílení tepla (ve směru souřadné osy  $x$ , která je orientovaná od rozhraní kmen—sklovina kolmým směrem k povrchu vrstvy) v plynné a kondenzované fázi v pohybující se vrstvě kmene, do kterých je zabudován přestup tepla mezi oběma fázemi, proměnné materiálové vlastnosti a pomocí stupně přeměny  $\alpha$  kinetika tavení. Tyto diferenciální rovnice jsou sestaveny na základě bilance energie a hmoty a jsou řešeny buď analytiko-numerickou metodou, nebo čistě numericky metodou konečných diferencí. Výsledkem je výpočet průběhu teploty ve vrstvě, tloušťky vrstvy, doby tavení a potřebných tepelných toků v závislosti na volitelných technologických parametrech tavení kmene (zakládání, odběr, velikost celkového reakčně transformačního tepla, vlhkost kmene, okrajové podmínky apod.).

## 2. MODELOVÉ ROVNICE

Bilance hmoty pro každou fázi představují rovnice kontinuity s hmotnostními zdroji

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} - \frac{\partial j_s}{\partial x} - r_s = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial j_g}{\partial x} - r_g = 0, \quad (2)$$

kde je  $\rho_s = \gamma \tilde{\rho}_s$  — hustota kmene (přesněji hustota kondenzované fáze),  
 přičemž  $\tilde{\rho}_s$  je plná hustota a  $\gamma$  hutnost,  
 $\rho_g$  — hustota plynné fáze,  
 $j_s = \rho_s v_s$ ;  $j_g = \rho_g v_g$  — hustoty hmotnostních toků příslušných fází (rychlosti jsou dány vektory  $\mathbf{v}_s = -v_s \mathbf{n}_0$ ,  $\mathbf{v}_g = v_g \mathbf{n}_0$ , kde  $\mathbf{n}_0$  je jednotkový vektor osy  $x$ ),  
 $t$  — čas,  
 $r_s, r_g$  — lokální hmotnostní zdroje [ $\text{kg m}^{-3} \text{s}^{-1}$ ].

přičemž index  $s$  značí kondenzovanou a index  $g$  plynnou fázi. Jelikož se v uvedeném modelu předpokládá přítomnost pouze dvou fází, musí platit ve stacionárním případě v každém místě  $x$  vrstvy zákon zachování hmoty ve tvaru

$$r_s + r_g = 0.$$

Potom pro stacionární stav plyne z rov. (1) diferenciální rovnice

$$-\frac{dj_s(x)}{dx} + r_g(x) = 0,$$

jejíž integrací vznikne vztah pro hustotu hmotnostního toku kondenzované fáze

$$j_s(x) = Q_B - R_g(x), \quad (3)$$

kde je zavedena nová veličina, tzv. integrální plynný zdroj

$$R_g(x) = \int_x^L r_g(\xi) d\xi \quad (4)$$

představující hmotu plynu uvolněnou ze směsi jednotkovou plochou za jednotku času na úseku  $(x, L)$  vrstvy; rozměr  $R_g(x)$  je tedy shodný s rozměrem hustoty hmotnostního toku, tj.  $\text{kg s}^{-1} \text{m}^{-2}$  ( $L$  je  $x$ -ová souřadnice povrchu vrstvy, tedy její tloušťka). Konstanta  $Q_B$  má význam zakládání kmene na povrch vrstvy v místě  $x = L$ , tj.  $Q_B = j_s(L)$ . Dosazením hodnoty  $x = L$  do rovnice (3) vznikne vztah mezi odběrem  $Q_G$  (odběr představuje hustotu hmotnostního toku skloviny v místě rozhraní  $x = 0$ , tedy  $Q_G = j_s(0)$ ), zakládáním  $Q_B$  a celkovým plynným zdrojem  $R$ :

$$R = Q_B - Q_G. \quad (5)$$

Celkový plynný zdroj  $R$  je obecně definován integrálním vztahem (4) při dosazení hodnoty  $x = 0$ , tedy  $R = R_g(0)$ . Analogicky plyne integrací rov. (2) pro stacionární hustotu hmotnostního toku plynné fáze vztah

$$j_g(x) = R - R_g(x) \quad (6)$$

a rozdíl absolutních hodnot hustot hmotnostních toků (3), (6) obou fází v libovolném místě  $x$  (obecně vektorový součet) bude tedy v souladu se stacionárním pojetím roven konstantní hodnotě odběru  $Q_G$ :

$$j_s(x) - j_g(x) = Q_G. \quad (7)$$

Z teorie racionální fyziky [5] na základě představy pohybu „tělesového bodu“ lze určit čas  $t$  potřebný k jeho průchodu od založení na povrch vrstvy do libovolného místa  $x$ :

$$t = t_G - \int_0^x \frac{Q_s(\xi)}{j_s(\xi)} d\xi, \quad (8)$$

příčemž doba  $t_G$ , potřebná k jeho průchodu celou vrstvou, jež se nazývá dobou tavení kmene, je dána integrálem

$$t_G = \int_0^L \frac{Q_s(x)}{j_s(x)} dx. \quad (9)$$

Plynný stupeň přeměny  $\alpha_g$  je definován normováním integrálního plynného zdroje  $R_g(x)$  vztahem

$$\alpha_g(x) = \frac{R_g(x)}{R} \quad (10)$$

a má tedy vlastnosti funkce  $R_g(x)$ , tzn., že  $\alpha_g(x)$  je nerostoucí funkce  $x$  a nabývá hodnot od  $\alpha_g(L) = 0$  na povrchu vrstvy do  $\alpha_g(0) = 1$  na rozhraní kmen—sklovina. V dalším výkladu se bude předpokládat navíc ryzí monotónnost funkce  $R_g(x)$ , tedy  $\alpha_g(x)$  bude prostá klesající funkce.

Bilanci energie představují diferenciální rovnice prostupu tepla pohybující se vrstvou kmene, a to pro plynnou a kondenzovanou fázi zvlášť. Přesné vyjádření přenosových mechanismů v uvažovaném dvofázovém disperzním systému je značně obtížný problém, který se zatím podařilo vyřešit pouze aproximativně, což odpovídá makroskopickému pojetí celého modelu. Konduktance tepla v každé fázi je vyjádřena Fourierovým zákonem  $q_{ci} = -\lambda_i^{ef} dT_i/dx$  s efektivní tepelnou vodivostí  $\lambda_i^{ef}$ , jež v sobě zahrnuje i vliv měnící se hutnosti  $\gamma$  tavicího se kmene. Konvekce tepla

je vyjádřena obvyklým přenosem  $q_{ki} = j_i c_i T_i$ , přestup tepla mezi oběma fázemi je určen pomocí Newtonova ochlazovacího zákona  $q_{g \rightarrow s} = (T_g - T_s) \varphi \tilde{\beta}$ , kde  $\varphi$  [ $\text{m}^{-1}$ ] je vnitřní specifický povrch kondenzované fáze a  $\tilde{\beta}$  [ $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$ ] je koeficient plošného přestupu tepla. Přenos zářením uvnitř vrstvy se vzhledem k velmi malé velikosti pórů mezi poměrně malými elementy kondenzované fáze (pod 1 mm) zanedbává, protože v tomto případě je poměr zářivého a celkového konduktivního toku menší než 0,05 [6]. Zářivý tepelný tok v oblasti vznikající taveniny (při vyšších teplotách) se však zanedbává, ale je zahrnut v konduktivním toku pomocí plně efektivní tepelné vodivosti  $\lambda_s$ .

K těmto přenosovým mechanismům přistupuje navíc tepelný propad  $h$  v kondenzované fázi, jenž vyjadřuje energii spotřebovanou (na reakce a transformace) v jednotce objemu za jednotku času, a který lze v souhlasu s teorií kinetiky procesů [7] vyjádřit v obecném tvaru

$$h = H Q_s \dot{\alpha}_e, \quad (11)$$

přičemž  $H$  je celkové množství tepla spotřebované na přeměnu jednotky hmoty kmene na taveninu (reakčně transformační teplo) a  $\dot{\alpha}_e$  je rychlost přeměny vyjádřená pomocí časové derivace energetického stupně přeměny  $\alpha_e$ , tedy  $\dot{\alpha}_e = d\alpha_e/dt$ . Energetický stupeň přeměny  $\alpha_e$  je definován podobně jako plynný stupeň přeměny  $\alpha_g$ , a to normováním integrálního tepelného propadu  $H_e(x)$ , který má význam celkové spotřeby tepla (vztažené na jednotku hmoty kmene) na úseku  $(x, L)$  vrstvy, a je určen vztahem

$$H_e(x) = \int_x^L \frac{h(\xi)}{j_s(\xi)} d\xi, \quad (12)$$

přičemž rozměr  $[H_e(x)] = J \text{ kg}^{-1}$ . Celkové reakčně transformační teplo  $H$  je potom dáno tímto integrálem (12) stanoveným pro meze  $(0, L)$ , tj. pro celou vrstvu. Pro  $\alpha_e(x)$  platí tedy definiční vztah

$$\alpha_e(x) = \frac{1}{H} \int_x^L \frac{h(\xi)}{j_s(\xi)} d\xi \quad (13)$$

čili  $\alpha_e(x)$  je podobně jako  $\alpha_g(x)$  nerostoucí funkcí  $x$ , přičemž  $\alpha_e(L) = 0$  a  $\alpha_e(0) = 1$ . V dalším výkladu se bude předpokládat, že  $H_e(x)$  bude podobně jako  $R_g(x)$  navíc ryze monotónní, čili  $\alpha_e(x)$  bude prostá klesající funkce. Diferencováním vztahu (13) plyne pro tepelný propad  $h(x)$  výraz

$$h(x) = -H j_s(x) \frac{d\alpha_e(x)}{dx},$$

kteřý při předpokladu platnosti teplotního funkčního vyjádření  $\alpha_e = \alpha_e(T)$  lze užitím vztahu

$$\frac{d\alpha_e}{dx} = \frac{d\alpha_e}{dT} \frac{dT}{dx} = f_e(T) \frac{dT}{dx}$$

upravit na tvar

$$h = -H j_s f_e(T) \frac{dT}{dx}, \quad (14)$$

kde je pro vyjádření teplotní derivace  $\alpha_e(T)$  použita funkce  $f_e(T) = d\alpha_e/dT$ . Vyjádření tepelného propadu  $h$  vztahem (14), jenž je vhodný pro aplikaci v diferenciální energetické rovnici, lze také přímo získat z obecného výrazu (11):

$$h = H \varrho_s \frac{d}{dt} \alpha_e(T(x(t))) = H \varrho_s \frac{d\alpha_e}{dT} \frac{dT}{dx} \frac{dx}{dt} = -H j_{sf} e(T) \frac{dT}{dx},$$

přičemž vzhledem k orientaci osy  $x$  je rychlost kondenzované fáze dána vztahem  $v_s = -dx/dt$ .

Diferenciální stacionární rovnice přenosu energie v pohybující se vrstvě kmene mají tedy pro plynnou a kondenzovanou fázi tvar

$$j_g c_g \frac{dT_g}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \lambda_g \frac{dT_g}{dx} \right) - \varphi \tilde{\beta}(T_g - T_s), \quad (15)$$

$$-j_s c_s \frac{dT_s}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \lambda_s^{\text{ef}} \frac{dT_s}{dx} \right) + \varphi \tilde{\beta}(T_g - T_s) + H j_{sf} e(T) \frac{dT_s}{dx}. \quad (16)$$

V rovnicích (15) a (16) jsou však hustoty hmotnostních toků  $j_s$  a  $j_g$  funkcemi plyného stupně přeměny  $\alpha_g$ , a člen pro tepelný propad  $h$  obsahuje energetický stupeň přeměny  $\alpha_e$ . Vzhledem k neúměrné obtížnosti experimentálního stanovení průběhu  $\alpha_e$  a navíc komplikovanosti vlastního řešení obou rovnic se dvěma stupni přeměny bylo provedeno zjednodušení zavedením pouze jednoho stupně přeměny  $\alpha$ , který byl ztotožněn s  $\alpha_g$  (viz kap. 1). Takto upravené rovnice (15) a (16) byly vyřešeny [1] simultánní numerickou metodou, přičemž bylo zjištěno, že průběh teploty plyné a kondenzované fáze ve vrstvě je až na nepatrné odchylky shodný. Tento výsledek potvrzuje teoretickou možnost sloučení obou rovnic (15) a (16) do jediné rovnice při předpokladu relativně rychlého lokálního přestupu tepla mezi oběma fázemi, z čehož plyne lokální rovnost teplot  $T_g(x) = T_s(x) = T(x)$ . Modelová rovnice tavení pohybující se vrstvy kmene má tedy po uvedeném sloučení rovnic (15) a (16) konečný tvar

$$(j_g c_g - j_s c_s) \frac{dT}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \lambda_s^{\text{ef}} \frac{dT}{dx} \right) + \frac{d}{dx} \left( \lambda_g \frac{dT}{dx} \right) + H j_{sf} e(T) \frac{dT_s}{dx}. \quad (17)$$

Okrajové podmínky pro diferenciální rovnici (17) lze určit z rovnosti součtu vstupujících a vystupujících hustot tepelných toků v místech rozhraní (tj. pro  $x = 0$  a  $x = L$ ):

$$\sum q_{\text{vst}} = \sum q_{\text{výst}},$$

přičemž podle modelových předpokladů ( $\alpha(0) = 1$ ;  $\alpha(L) = 0$ ) nejsou na žádném rozhraní vnitřní materiálové tepelné propady ani zdroje. Pro rozhraní kmen—sklovina ( $x = 0$ ) tedy plyne okrajová rovnice

$$q_G = - \left( \lambda_s^{\text{ef}} \frac{dT}{dx} \right)_{x=0}, \quad (18)$$

kde  $q_G$  je dodávaná celková (tj. konduktivní plus zářivá) hustota tepelného toku do vrstvy kmene v místě  $x = 0$  a pro povrch vrstvy ( $x = L$ ) lze použít okrajovou rovnici

$$- \left( \lambda_s^{\text{ef}} \frac{dT}{dx} \right)_{x=L} - Q_{BCsB} T_B = -Q_{BCsF} T_F + \beta(T_B - T_A) + \sigma \mathfrak{F}(T_B^4 - T_A^4), \quad (19)$$

kde index F značí hodnoty zakládajícího kmene, index B hodnoty na povrchu vrstvy,  $T_A$  teplotu okolí nad vrstvou,  $\beta$  koeficient přestupu tepla z vrstvy,  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$  Stefan—Boltzmannovu konstantu a  $\mathfrak{F}$  součinitele vzájemného ozáření.

## 3. MATERIÁLOVÉ FUNKCE

Stanovení potřebných materiálových funkcí je poměrně složitý problém, který byl pomocí matematicko-fyzikálních modelů podrobně řešen v práci [1]. Pro upravenou modelovou rovnici (17) byly zvoleny následující tvary aproximativního vyjádření materiálových funkcí:

$$j_s = Q_G[p - \alpha(T) \cdot (p - 1)], \quad (20)$$

$$j_g = j_s - Q_G \quad (21)$$

$$\begin{aligned} c_s &= c_{s1} + c_{s2}T \text{ pro } T < T_{cs}, \\ c_s &= c_s(T_{cs}) = c_{s3} \text{ pro } T \geq T_{cs}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$c_g = c_{g1} + c_{g2}T - \frac{c_{g3}}{T} \text{ pro } T \geq T_{cg}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} c_g &= c_g(T_{cg}) = c_{g4} \text{ pro } T < T_{cg}, \\ \rho_s &= \rho_{s1} + \rho_{s2}T, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\lambda_s^{ef} = a_s \exp\{b_s(T - T_\lambda)\}, \quad (25)$$

$$\lambda_g = a_g + b_g T, \quad (26)$$

$$f(T) = \sum_T \frac{j_{mI}}{1 + 4 \left( \frac{T - T_{mI}}{\Delta T_I} \right)^2}, \quad (27)$$

$$\alpha(T) = \sum_T \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2(T - T_{mI})}{\Delta T_I} \right] \Delta \alpha_T. \quad (28)$$

Funkční vztahy (20) a (21) pro hustoty hmotnostních toků  $j_s$  a  $j_g$  plynou přímo z rovnic (3), (5), (6), (10), kde byl celkový integrální plynný zdroj  $R$  nahrazen v praxi běžně používaným faktorem  $p$  definovaným na základě vztahu

$$Q_B = pQ_G \quad (29)$$

pro zakládání a odběr, přičemž  $R = Q_G(p - 1)$ .

Měrné teplo  $c_s(T)$  kondenzované fáze je v oblasti teplot  $T < T_{cs}$  určeno váženým součtem (podle hmotnostních koncentrací  $w_i$ ) teplotních funkcí měrných tepel jednotlivých složek kmene vztahem

$$c_s(T) = \sum_i w_i c_{si}(T) \quad (30)$$

a v oblasti  $T \geq T_{cs}$ , kde již dochází k rozvinutí transformačních přeměn a chemických reakcí, přičemž se hodnota měrného tepla příliš nemění, je  $c_s$  aproximováno konstantou.

Měrné teplo  $c_g(T)$  plynné fáze je v oblasti  $T \geq T_{cg}$  dáno průběhem měrného tepla  $c_{CO_2}(T)$  plynného kyslíčitého, který se při tavení kmene převážně uvolňuje, a v oblasti  $T < T_{cg}$  (tj.  $\alpha < \alpha_{cg}$ ), kde se vyvíjí navíc plynná  $H_2O$  je přesný výraz [1]

$$c_g(T) = \frac{(\alpha_{cg} - \alpha)c_{H_2O}(T) + (1 - \alpha_{cg})c_{CO_2}(T)}{1 - \alpha} \quad (31)$$

s relativně malou chybou nahrazen průměrnou konstantní hodnotou  $c_{g4}$ .

Teplotní průběh hustoty  $\rho_s$  je aproximován lineární funkcí (24) s poměrně nevelkou strmostí.

Pro stanovení efektivní tepelné vodivosti  $\lambda_s^{\text{ef}}$  byl vypracován [1] poměrně složitý odporový model, jenž poskytuje závislost

$$\lambda_s^{\text{ef}}(T) = a_1 \exp\{a_2(T - a_3)\} \cdot \frac{2[\dot{\gamma}(T) - \dot{\gamma}_M]}{\ln \left[ \frac{2\dot{\gamma}(T) - \dot{\gamma}_M}{\dot{\gamma}_M} \right]}, \quad (32)$$

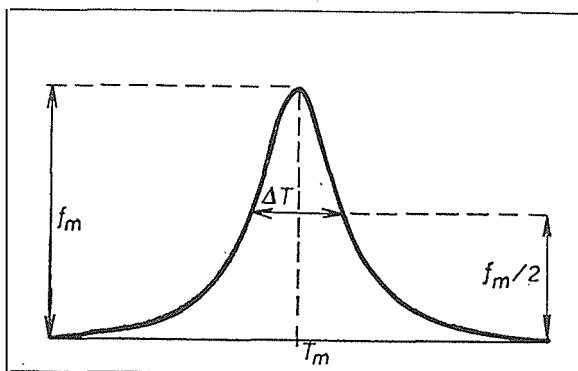
kde  $\dot{\gamma}(T) = \rho_s(T)/\hat{\rho}_s(T)$  je hutnost,  $\dot{\gamma}_M \doteq 0,942$  je maximální hutnost určená pomocí geometrického modelu struktury tavicího se kmene a hodnoty  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  přísluší efektivní vážené tepelné vodivosti plného materiálu kmene a vzniklé taveniny. Tento výraz byl pro případ konkrétních kmenů aproximován jednoduchou exponenciální funkcí (25).

Tepelná vodivost  $\lambda_g$  plynné fáze je určena proložení experimentálních hodnot [16] a [17] tepelné vodivosti plynného  $\text{CO}_2$  lineární funkcí (26). Lineární funkce tyto hodnoty velmi přesně aproximuje, přičemž tepelná vodivost plynné  $\text{H}_2\text{O}$ , jež je v malém množství přítomná v kmeni na počátku tavicího procesu, je velmi blízká  $\lambda_{\text{CO}_2}(T)$ , a proto nebyla v celkové  $\lambda_g(T)$  uvažována.

Funkce  $\alpha(T)$  a  $\alpha'(T) = f(T)$  jsou určeny proložení několika (při různých rychlostech ohřevu) experimentálních závislostí TG měření konkrétního kmene, přičemž tyto závislosti mají obecný charakter kinetiky následných procesů. Pro popis jednotlivých parciálních kinetických procesů ( $I$ ), které je možno celkem dobře odseparovat na průběhu experimentální DTG závislosti (tj. teplotní závislost  $\alpha'(T)$ , jež je stanovena numerickou derivací znormované experimentální TG křivky), byly použity Lorentz—Cauchyho symetrické funkce ve tvaru

$$f_I(T) = \frac{f_{mI}}{1 + 4 \left( \frac{T - T_{mI}}{\Delta T_I} \right)^2}, \quad (33)$$

kde  $f_{mI}$  je výška,  $\Delta T_I$  pološířka (tj. šířka v polovině výšky) a  $T_{mI}$  teplotní poloha  $I$ -tého derivačního profilu, jak je schematicky znázorněno na obr. 1. Součet funkcí (33) pro jednotlivé  $I$ -té kinetické procesy tvoří potom celkový derivační kinetický průběh (27) procesu tavení. Integrací profilové funkce (33) a následným jednotkovým



Obr. 1. Parametry derivačního profilu  $\alpha'(T)$ . Označení:  $f_m$  = výška,  $T_m$  = poloha,  $\Delta T$  = pološířka.

normováním (pro  $0 \leq \alpha_I \leq 1$ ) plyne pro teplotní průběh stupně přeměny  $\tilde{\alpha}_I$   $I$ -tého procesu modelová funkce

$$\tilde{\alpha}_I(T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2(T - T_{mI})}{\Delta T_I}, \quad (34)$$

kteřá má pro mezní teploty asymptotický průběh, tj.  $\lim_{T \rightarrow 0} \tilde{\alpha}_I(T) = 0$  a  $\lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{\alpha}_I(T) = 1$ , přičemž strmost průběhu  $\tilde{\alpha}_I(T)$  závisí na parametru pološířky  $\Delta T_I$ . Dalším normováním takto získaných funkcí  $\tilde{\alpha}_I(T)$  do intervalu  $\Delta \alpha_I$  vah jednotlivých procesů, přičemž  $\Sigma \Delta \alpha_I = 1$ , vzniknou parciální vážené funkce  $\alpha_I(T) = \tilde{\alpha}_I(T) \cdot \Delta \alpha_I$  příslušných kinetických procesů, jejichž součtem je tvořen průběh (28) celkového stupně přeměny  $\alpha(T)$ . Výsledek konkrétního provedení všech uvedených operací s pěti rozlišenými procesy je na obr. 3, části II. článku, kde jsou tečkami a křížky znázorněny experimentální body a plnými křivkami proložené aproximativní funkce (27) a (28).

Aplikace materiálových funkcí (20) až (28) při řešení modelové rovnice (17) s proměnným tepelným propadem (14) představuje zcela nový přístup (byť zatím stacionární) k praktickému matematickému modelování tavení kmenů. Dosud publikované modely [8] až [13] byly vesměs vytvářeny při použití velmi zjednodušeného předpokladu konstantních efektivních materiálových vlastností (kromě několika případů s teplotně závislou tepelnou vodivostí) a s lokalizovaným tepelným propadem (daným celkovou reakčně transformační spotřebou tepla  $H$ ) v místě rozhraní kmen—sklovina.

V části II. tohoto článku budou uvedeny postupy a rozbor řešení modelové rovnice (17) a na konkrétním příkladě bude ilustrován způsob stanovení všech materiálových funkcí a výpočet rozložení teploty (včetně vlivů okrajových a technologických podmínek) ve vrstvě tavicího se kmenů.

#### Literatura

- [1] Schill P.: *Matematický model tavení kmenů*, rigorózní práce, MFF UK Praha 1979.
- [2] Wilburn F. W., Mectalfe S. A., Warburton R. S.: *Glass Technology* 6, 107 (1965).
- [3] Kröger C.: *Glastechn. Ber.* 26, 202 (1953).
- [4] Šašek L., Smrčková O.: *Sborník VŠCHT L3* (1973) str. 115—161.
- [5] Truesdell C.: *A First Course in Rational Continuum Mechanics*, Baltimore, Maryland 1972, ruský překlad izd. Mir, Moskva 1975.
- [6] Daniels M.: *Glastechn. Ber.* 46, 40 (1973).
- [7] Wendlandt W. W.: *Thermal Methods of Analysis*, John Wiley, New York 1974, ruský překlad izd. Mir, Moskva 1978.
- [8] Laptěv V. L.: *Stěklo (Trudy Instituta stěkla)* 133 No. 2, 33 (1967).
- [9] Pugh A. C. P.: *Glastekniksk Tidskrift* 23, 95 (1968).
- [10] Fuhrman H.: *Glastechn. Ber.* 46, 201 (1973), 46, 209 (1973).
- [11] Austin M. J.: *Glass Technology* 11, 128 (1970).
- [12] Austin M. J., Bourne D. E.: *Glass Technology* 14, 78 (1973).
- [13] Leyens G.: *Glastechn. Ber.* 47, 251 (1974), 47, 261 (1974).
- [14] Barin I., Knacke O.: *Thermochemical Properties of Inorganic Substances*, Springer Verlag 1973.
- [15] Weast R. C.: *Handbook of Chemistry and Physics*, CRC Press, Cleveland 1975.
- [16] Kutateladze S. S.: *Příručka sdílení tepla*, SNTL, Praha 1962.
- [17] Rohsenow W. M., Hartnett J. P.: *Handbook of Heat Transfer*, McGraw-Hill, 1973.
- [18] Kröger C., Eligehausen H.: *Glastechn. Ber.* 32, 362 (1959).
- [19] Neuroth N.: *Glastechn. Ber.* 32, 197 (1959).
- [20] Smrčková O.: *Silikáty* 17, 169 (1973).



- [21] Honolke B.: Výrobní tepla obalových skel, nepublikovaná výzkumná zpráva, Sklo Union, Teplice 1963.  
 [22] Kröger C., Janetzko W.: Z. Anorg. Allg. Chemie 29, 287 (1956).  
 [23] Volf M. B. a kol.: Tepelné vlastnosti skel, SNTL, Praha 1968.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛАВКИ ШИХТЫ  
 В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЕЧАХ  
 ЧАСТЬ I, ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ МОДЕЛИ

Петр Шилл

Государственный научно-исследовательский институт стекла, Градец Кралово

Разработана стационарная одномерная математическая модель плавки слоя шихты с нижним подогревом при применении переменных материальных величин и непрерывного внутреннего источника тепла. Модель учитывает также кинетику плавки за счет введения общей степени превращения, конкретно определенной из термогравиметрического неизотермического измерения. Модельное уравнение (17) составлено на основе энергетических и массовых балансов в конденсированной и газовой фазах движущегося слоя шихты.

Для переменных материальных величин плотности массового потока  $j_s$ ,  $j_g$ , теплоемкости  $c_s$ ,  $c_g$ , плотности  $\rho_s$ , теплопроводности  $\lambda_s^{cf}$ ,  $\lambda_g$ , степени превращения  $\alpha(T)$ , температурной производной степени превращения  $\alpha'(T)$  и для поведения внутреннего источника тепла  $h$  были определены конкретные формы аппроксимирующих материальных функций (20)–(28), где индекс  $s$  обозначает конденсированную и индекс  $g$  газовую фазу. Степень превращения  $\alpha(T)$  и его производную  $\alpha'(T) = f(T)$  определяют суммы (28) и (27) весовых кинетических функций парциальных процессов, протекающих при плавке шихты и регистрируемых с помощью ТГ измерений.

В части II статьи будут указаны методы и анализы решения модельного уравнения (17), включая конкретные примеры.

Рис. 1. Параметры производного профиля  $\alpha'(T)$ . Обозначение:  $f_m$  = высота,  $T_m$  = положение,  $\Delta T$  = полуширина.

MATHEMATICAL MODEL OF BATCH MELTING IN ALL-ELECTRIC FURNACES PART I. THEORETICAL MODEL CONCEPTIONS

Petr Schill

State Glass Research Institute, Hradec Králové

A stationary one-dimensional mathematical model of the batch layer melting with bottom heating was developed using variable material quantities and continuous heat sink. The model also considers the melting kinetics by introducing a general degree of conversion definitely determined from TG non-isothermal measurements. The model equation (17) is drawn on the basis of energy and mass balances in a condensed and vapour phase of the moving batch layer.

For the variable material quantities of mass flux  $j_s$ ,  $j_g$ , of specific heat  $c_s$ ,  $c_g$ , density  $\rho_s$ , heat conductivity  $\lambda_s^{cf}$ ,  $\lambda_g$ , degree of conversion  $\alpha(T)$ , temperature derivative of the degree of conversion  $\alpha'(T)$  and the heat sink  $h$  behaviour, special forms of approximative material functions (20–28) are presented where the subscripts  $s$  and  $g$  indicate the condensed and the vapour phase, respectively. The degree of conversion  $\alpha(T)$  and its temperature derivation  $\alpha'(T) = f(T)$  are determined by the sums (28) and (27) of the weighted kinetic functions of partial processes which are proceeding during the batch melting and can be registered by non-isothermal TG measurements.

In the 2<sup>nd</sup> part of this paper the analyses of the model equation solutions (17) will be presented, together with application examples.

Fig. 1. Parameters of derivation profile  $\alpha'(T)$ . Notation:  $f_m$  = height,  $T_m$  = position,  $\Delta T$  = half width.