

MATEMATICKÝ MODEL TAVENÍ KMENE V ELEKTRICKÝCH PECÍCH

Část II. Řešení modelových rovnic

PETR SCHILL

Státní výzkumný ústav sklářský, Škroupova 957, 501 92 Hradec Králové

Došlo 2. 4. 1981

Jsou rozpracovány dva matematické způsoby řešení modelové rovnice tavení kmene odvozené v I. části článku a popsáno experimentální stanovení všech materiálových funkcí pro kmen, a to pro bílou obalovou sklovinu. Nakonec je provedeno několik aplikačních výpočtů průběhu tavení uvedeného kmene v 30ti tunové celoelektrické peci a stanoveny změny tloušťky vrstvy, doby tavení a dodávaného příkonu, přičemž jsou stanoveny kritické změny zakládání (o —2 %) a dodávaného příkonu (o +5 %) pro vznik protavů vrstvy kmene při zachování konstantních hodnot všech ostatních technologických parametrů. Modelově byl zjištěn poměrně malý vliv přesnosti určení hodnoty měrného reakčného transformačního tepla na průběh tavení kmene.

4. ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ

Modelovou rovnicí tavení kmene (17), odvozenou v I. části této práce, lze upravit na tvar

$$g(T) \frac{dT}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\lambda(T) \frac{dT}{dx} \right), \quad (35)$$

kde jsou označeny funkce

$$g(T) = j_g(\alpha(T)) \cdot c_g(T) - j_s(\alpha(T)) \cdot c_s(T) - H \cdot j_s(\alpha(T)) \cdot f(T), \quad (36)$$

$$\lambda(T) = \lambda_s^{\text{ef}}(T) + \lambda_g(T). \quad (37)$$

Po zavedení proměnné (mající fyzikální význam hustoty konduktivního tepelného toku)

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} \Rightarrow dx = -\frac{\lambda}{q} dT, \quad (38)$$

přejde rovnice (35) na tvar

$$\frac{g(T)}{\lambda(T)} dx = \frac{dq}{q}$$

a dále při použití diferenciálního tvaru transformace (38) proměnných (při předpokladu $q \neq 0$) na rovnici

$$g(T) dT = -dq,$$

jejíž řešení je dáno vztahem

$$q(T) = -K_1 - G(T), \quad (39)$$

kde je označena funkce

$$G(T) = \int g(T) dT. \quad (40)$$

Přechodem od q k původní proměnné T pomocí vztahu (38) vznikne z (39) diferenciální rovnice

$$\lambda(T) \frac{dT}{dx} = K_1 + G(T), \quad (41a)$$

jejíž řešení lze při předpokladu ryzí monotónnosti funkce $T = T(x)$ vyjádřit ve tvaru

$$x(T) = K_2 + \int \frac{\lambda(T)}{K_1 + G(T)} dT, \quad (41b)$$

přičemž integrační konstanty K_1 a K_2 se určí z okrajových podmínek (18) a (19) v místech $x = 0$ a $x = L$.

Vztah (41b) po provedení inverze proměnných $T(x) = x^{-1}(T)$ představuje obecné analytické řešení modelové rovnice (17). Integrál ve vztahu (41b) by bylo možné po dosazení všech materiálových funkcí (20) až (23) vypočítat buď numerickou metodou, nebo vhodnou přibližnou metodou integrace (např. Gaussovou metodou), přičemž v obou případech by šlo o poměrně komplikovaný výpočet. Provedení výpočtu integrálu čistě analytickou cestou je však i po značných zjednodušeních materiálových funkcí (např. použití jediného hypotetického kinetického procesu popsaného funkcí (34) a (33), lineárního vztahu pro $\lambda(T)$, konstantních hodnot hustot hmotnostních toků a měrných tepel) neúměrně pracné vzhledem k dosažené přesnosti. Rozložení teploty $T(x)$ je z praktického hlediska proto výhodnější počítat následující analyticko-numericou metodou, využívající rovnici (41a) a zavádějící jednu malou aproximaci, ale uvedený postup povede rychle k cíli.

5. ANALYTICKO-NUMERICKÉ ŘEŠENÍ

Při tomto způsobu řešení je použita jediná malá aproximace, a to nahrazení nevýrazně se měnících hustot hmotnostních toků $j_s(T)$ a $j_g(T)$ středními hodnotami

$$\overline{j_s(T)} = \frac{Q_G + Q_B}{2} = Q_G \frac{p+1}{2}; \quad \overline{j_g(T)} = \overline{j_s} - Q_G = Q_G \frac{p-1}{2}. \quad (42)$$

Dosazením těchto konstant (42) do výrazu (36) pro funkci $q(T)$ a následnou integrací při použití identity $\int f(T) dT = \alpha(T)$ plyne pro funkci $G(T)$ výraz

$$G(T) = Q_G \frac{p-1}{2} \int c_g(T) dT - Q_G \frac{p+1}{2} [\int c_s(T) dT + H \cdot \alpha(T)],$$

který má po dosazení materiálových funkcí (22) a (23) za měrná tepla $c_s(T)$ a $c_g(T)$ konkrétní tvar daný třemi funkcemi pro různé teplotní intervaly (při předpokladu $T_{cg} < T_{cs}$):

$$G_1(T) = \frac{Q_G}{2} \left[(p-1) c_{g4} \cdot T - (p+1) \left(c_{s1} T + c_{s2} \frac{T^2}{2} + H \cdot \alpha(T) \right) \right]; \quad T < T_{cg} \quad (43a)$$

$$G_2(T) = \frac{Q_G}{2} \left[(p-1) \left(c_{g1} T + c_{g2} \frac{T^2}{2} + \frac{c_{g3}}{T} \right) - (p+1) \left(c_{s1} T + c_{s2} \frac{T^2}{2} + H \cdot \alpha(T) \right) \right]; \quad T_{cg} < T < T_{cs} \quad (43b)$$

$$G_3(T) = \frac{Q_G}{2} \left[(p-1) \left(c_{g1}T + c_{g2} \frac{T^2}{2} + \frac{c_{g3}}{T} \right) - (p+1) (c_{s3}T + H \cdot \alpha(T)) \right];$$

$$T > T_{cs}, \quad (43c)$$

kde je stupeň přeměny $\alpha(T)$ vyjádřen materiálovou funkcí (28) a celková spotřeba tepla H vztahem (51).

Pro daný odběr Q_G a teplotu rozhraní T_G použitím vztahu (39) pro hustotu tepelného toku $q(T)$ a upravené okrajové podmínky (19) převedením zářivého přestupu tepla do efektivního konvektivního koeficientu přestupu tepla lze při zadání jedné z okrajových hodnot q_B , T_B , nebo q_G určit integrační konstantu K_1 a zbylé dvě okrajové veličiny:

a) Zadaná hustota tepelného toku q_B ztrát z povrchu vrstvy: Nejprve se ze zjednodušeného vztahu (19), tj. řešením rovnice

$$q_B = p \cdot Q_G [(c_{s1} + c_{s2}T_B) T_B - (c_{s1} + c_{s2}T_F) T_F] + \beta(T_B - T_A) \quad (44)$$

stanoví povrchová teplota T_B

$$T_B = -a_1 + \sqrt{a_1^2 + a_2}, \quad (45)$$

kde

$$a_1 = \frac{c_{s1} + \frac{\beta}{p \cdot Q_G}}{2c_{s2}}; \quad a_2 = \frac{(c_{s1} + c_{s2}T_F) T_F + \frac{\beta T_A + q_B}{p \cdot Q_G}}{c_{s2}}.$$

Potom se z rovnice (39) pro $T = T_B$ a $\alpha(T_B) = 0$ určí integrační konstanta $K_1 = -q_B - G_1(T_B)$ a nakonec se z rov. (39) pro $T = T_G$ a $\alpha(T_G) = 1$ vypočte hustota potřebného dodávaného tepelného toku $q_G = -K_1 - G_3(T_G)$.

b) Zadaná hustota tepelného toku q_G dodávaná do vrstvy kmene: Nejprve se z rov. (39) pro $T = T_G$ a $\alpha(T_G) = 1$ určí integrační konstanta K_1 , dále se z rov. (44) a (39) pro $T = T_B$ a $\alpha(T_B) = 0$ tj. z rovnice

$$-K_1 - G_1(T_B) = p \cdot Q_G [(c_{s1} + c_{s2}T_B) T_B - (c_{s1} + c_{s2}T_F) T_F] + \beta(T_B - T_A) \quad (46)$$

vypočte povrchová teplota T_B

$$T_B = -b_1 + \sqrt{b_1^2 + b_2}, \quad (47)$$

kde

$$b_1 = \frac{(p-1)(c_{s1} + c_{g4}) + 2\beta/Q_G}{c_{s2}(3p-1)}; \quad b_2 = \frac{4[pQ_G(c_{s1} + c_{s2}T_F) T_F + \beta T_A - K_1]}{Q_G \cdot c_{s2}(3p-1)}$$

a nakonec se dosazením této hodnoty T_B do rov. (39) nebo (44) určí hustota tepelného toku q_B .

c) Zadaná teplota T_B povrchu vrstvy kmene: Nejprve se z rov. (44) stanoví hustota povrchového tepelného toku q_B a potom stejným postupem jako add a) veličiny K_1 a q_G .

Jelikož je analytická integrace rov. (41b) neúměrně složitá, byl pro stanovení rozložení teploty $T(x)$ zvolen numerický postup řešení rov. (41a) diferenční metodou. Při označení diskretních hodnot teploty $T_i = T(x_i)$ v bodech $x_i = i \cdot \Delta$, kde Δ je diferenční rozměrový krok osy x , je rozložení teploty ve vrstvě kmene dáno vztahy

$$T_0 = T_G.$$

$$T_i = T_{i-1} + \frac{K_i + G(T_{i-1})}{\lambda(T_{i-1})} \Delta \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, (n-1) \quad (48)$$

$$T_n = T_B,$$

přičemž se hodnota posledního indexu n stanoví testováním každé vypočtené hodnoty T_i vzhledem k předem zadané (nebo vypočtené podle vztahů (45) nebo (47)) teplotě T_B , tedy pro každé i z nerovnosti $T_i < T_B \Rightarrow i < n$. Tímto způsobem je zároveň stanovena tloušťka vrstvy kmene

$$L = x_n = n \cdot \Delta. \quad (49)$$

Funkce $G(T_i)$ a $\lambda(T_i)$ v diferenční rovnici (48) jsou dány diskretizací analytických výrazů (43) a materiálových funkcí (25), (26), a (28). Celková doba t_G tavení kmene se vypočte numerickou integrací rov. (9) (lichoběžníkovou metodou) podle vztahu

$$t_G = \frac{\Delta}{Q_G} \left[\frac{q_{s1} \cdot (p+1) + q_{s2} \cdot (pT_G + T_B)}{2p} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{q_{s1} + q_{s2} \cdot T_i}{p - \alpha(T_i) \cdot (p-1)} \right]. \quad (50)$$

Při dané vlhkosti w [%] zakládáného kmene, výparném teple vody $H(\text{H}_2\text{O}) = 2,257 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ a reakčně transformačním teple H_m [J/kg skla] pro uvažované sklo se stanoví celková spotřeba tepla H na utavení 1 kg kmene podle vztahu

$$H = \frac{H_m}{p} + \frac{w}{100} \cdot H(\text{H}_2\text{O}); \quad [H] = \text{J/kg kmene}. \quad (51)$$

Přínos analyticko-numerického řešení spočívá v tom, že pro zadaný odběr Q_G a fyzikálně určenou teplotu rozhraní T_G lze při volitelné okrajové podmínce určené zadáním hodnoty povrchové hustoty tepelného toku q_B , nebo teploty na povrchu T_B , nebo hustoty dodávaného tepelného toku q_G stanovit zbývající okrajové veličiny, rozdělení teploty $T = T(x)$, tloušťku L vrstvy a dobu tavení kmene t_G . Při zadávání okrajových podmínek je zvláště cenná informace v případě add b), která matematickým způsobem (existence a hodnota řešení kvadratické rovnice (46) vztahem (47)) vylučuje fyzikálně nepřípustné hodnoty q_G , tzn., že při daném odběru Q_G nelze volit libovolně velikost dodávané hustoty tepelného toku q_G , která je závislá na kinetice a energetické náročnosti procesu tavení kmene. Z tvaru křivky vypočteného průběhu rozložení teploty $T = T(x)$ je možné dále soudit na vhodnost velikostí všech okrajových veličin (q_B , T_B , T_A , T_F , q_G , Q_G).

6. NUMERICKÉ ŘEŠENÍ METODOU KONEČNÝCH DIFERENCÍ

Iterační diferenční způsob řešení modelové rovnice (17) poskytuje nejpřesnější výsledky, protože se plně využívá všech materiálových funkcí, včetně proměnných hmotnostních toků (20) a (21), avšak vzhledem k nutnosti volby poměrně malé časové difference δ je časově náročnější než jiné způsoby řešení.

Pro dosažení co nejlepší stability výpočtu byly modelová rovnice (17) a okrajové podmínky (18) a (19) nejprve upraveny do nestacionárního tvaru s fiktivním časem τ (tj. rozšířením o akumulaci časový člen $qc \cdot \partial T / \partial \tau$). Potom byly převedeny do diferenčního tvaru a iterativně řešeny, přičemž je tento výpočet ukončen v okamžiku, kdy se teplotní pole v závislosti na fiktivním čase τ nemění více než předem stanovená testovací hodnota ε , tzn., že teplotní stav, kdy je pro všechna i splněna podmínka

$$|T_i(\tau_{k-1}) - T_i(\tau_k)| \leq \varepsilon, \quad (52)$$

je považován za stacionární řešení rovnice (17).

Při označení velikosti rozměrového kroku Δ (dolní indexy i) a časového kroku δ (horní indexy k) a zanedbání členu $\varrho_g C_g \leq \varrho_s C_s$ bude diferenční tvar rov. (17) dán výrazem

$$\begin{aligned} \varrho_{si}^k c_{si}^k \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\delta} + (j_{gi}^k c_{gi}^k - j_{si}^k c_{si}^k - H \cdot j_{si}^k / i_i^k) \frac{T_{i+1}^k - T_{i-1}^k}{2\Delta} = \\ = \frac{\lambda_{i+}^k}{\Delta^2} (T_{i+1}^k - T_i^k) - \frac{\lambda_{i-}^k}{\Delta^2} \cdot (T_i^k - T_{i-1}^k), \end{aligned} \quad (17a)$$

kde je

$$\lambda_{i+}^k = \frac{\lambda_i^k + \lambda_{i+1}^k}{2}; \quad \lambda_{i-}^k = \frac{\lambda_i^k + \lambda_{i-1}^k}{2}; \quad \lambda_i = \lambda_{si}^{ef} + \lambda_{gt},$$

ze kterého lze již snadno vyjádřit teplotu T_i^{k+1} jako funkci teploty T_i^k a materiálových veličin (20—28) z hladiny (i, k) . Okrajové podmínky (18) a (19) budou vyjádřeny diferenčními rovnicemi

$$q_G = -\lambda_1^k \frac{T_1^k - T_0^k}{\Delta} + \frac{\Delta \cdot \varrho_{s1}^k c_{s1}^k}{\delta} (T_0^{k+1} - T_0^k), \quad (18a)$$

$$\begin{aligned} -\lambda_n^k \frac{T_n^k - T_{n-1}^k}{\Delta} = pQ_G(c_{sn}T_n^k - c_{sf}T_f) + \beta(T_n^k - T_A) + \\ + \sigma \mathcal{F} [(T_n^k)^4 - T_A^4] + \frac{\Delta \varrho_{sn} c_{sn}}{\delta} (T_n^{k+1} - T_n^k), \end{aligned} \quad (19a)$$

ze kterých se pro účely výpočtu opět vyjádří teploty T_0^{k+1} a T_n^{k+1} . Jako počáteční rozdělení teploty T_i^0 je možno použít např. výsledek analyticko-numerického řešení (kap. 5). Dobu tavení kmene t_G lze v každé časové hladině vypočítat podle vztahu (50).

Pro zaručení konvergence výpočtu je nutno volit difference Δ a δ tak, aby byla splněna podmínka stability, jež je vyjádřena nerovnostmi [13]

$$\frac{\lambda \cdot \delta}{\varrho_s c_s \Delta^2} \leq \frac{1}{2}; \quad \text{Pe} = \frac{j_s c_s}{\lambda} \cdot \Delta \leq 2, \quad (52)$$

kde Pe je Pecletovo číslo, které pro prakticky uvažované hodnoty materiálových veličin j_s, c_s, λ a $\Delta \leq 4$ cm nepřesáhne hodnotu 2.

V uvedeném způsobu iteračního řešení byly voleny 2 okrajové podmínky ve formě bilance tepelných toků s variabilními okrajovými teplotami T_G a T_B , a proto je výsledné řešení značně pružné a přímo nedeterminující tloušťku vrstvy L . Tento přístup byl volen proto, aby bylo možno proces tavení posoudit co nejjobecněji, ovšem na úkor časové náročnosti výpočtů. Např. při optimalizaci tloušťky vrstvy L je nutno provádět celé iterační výpočty pro několik hodnot L volených na základě ostatních technologických parametrů. Výsledné řešení potom však vychází z předem stanovené neurčitosti ΔT_G teploty rozhraní kmen-sklovina, což představuje fyzikálně reálnější přístup, než pevná předurčenost teploty T_G , jež byla použita v kap. 5. při analyticko-numerickém způsobu řešení.

Při nejjobecnějším rozboru tavení vrstvy kmene je výhodné postupovat tak, že se nejprve provede analyticko-numerický výpočet, který má funkci výchozího teplotního rozdělení pro práci s iteračním řešením.

7. STANOVENÍ MATERIÁLOVÝCH FUNKCÍ

Konkrétní tvary materiálových funkcí (20—28) byly stanoveny pro čistý kmen (bez střepeů) pro běžnou bílou obalovou sklovinu o složení [hm.%]: 71,00 SiO₂, 8,85 CaO, 15,50 Na₂O, 3,70 MgO, 0,95 Al₂O₃, 0,10 SO₃.

Měrné teplo kondenzované fáze je v oblasti $T \leq 606$ K dáno podle vztahu (30) výrazem

$$c_s(T) = 0,580 c_K(T) + 0,055 c_V(T) + 0,138 c_D(T) + \\ + 0,227 c_N(T) = 497 + 1,16 \cdot T; \quad [\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}], \quad (22a)$$

kte teplovní průběh měrných tepel použitých surovin křemene, vápence, dolomitu a sody je dán funkcemi $c_K(T)$, $c_V(T)$, $c_D(T)$, $c_N(T)$ převzatými z [14] a v oblasti $T > 606$ K je aproximováno hodnotou

$$c_{s3} = 1200 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}, \quad (22b)$$

kte odpovídá střednímu měrnému teplu určenému na základě kysličnickového složení pomocí vážené aditivní funkce podle Sharpa a Ginthera [23].

Měrné teplo plynné fáze je v oblasti $T > 420$ K dáno teplotním průběhem měrného tepla CO₂ [14]:

$$c_g(T) = 1003 + 0,21T - \frac{1,93 \cdot 10^7}{T^2}; \quad [\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}] \quad (23a)$$

a v oblasti $T \leq 420$ po dosazení $c_{\text{H}_2\text{O}}(T)$, $c_{\text{CO}_2}(T)$ a $\alpha(T)$ do vztahu (31) je vzhledem k nevýrazné teplotní závislosti aproximováno konstantou

$$c_{g4} = 982 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}. \quad (23b)$$

Hustota tavicího se kmene byla z důvodů neúměrné experimentální náročnosti aproximována lineárním vztahem (24) vycházejícím z okrajových hodnot $\rho_s(300 \text{ K}) = 1243 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a $\rho_s(1273 \text{ K}) = 2172 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$:

$$\rho_s(T) = 956 + 0,955 \cdot T; \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]. \quad (24a)$$

Tepelná vodivost λ_s^{ef} je velmi obtížně stanovitelná, protože kondenzovaná fáze se na počátku procesu skládá z několika látek s různými tepelnými vodivostmi, jejichž hodnoty uváděné v dostupné literatuře nejsou jednotné, a navíc postihnout měnící se geometrickou strukturu tavicího se kmene je poměrně složitý problém. K váženému průměrování plné tepelné vodivosti λ_s bylo použito literárních údajů pro tepelné vodivosti křemene, vápence [15], [16], [17], skla a skloviny, [18], [19], včetně zářivého příspěvku při vyšších teplotách. Tato plná tepelná vodivost, jež má exponenciální průběh, byla vynásobena modelovou funkcí měnící se hutností $\gamma(T)$ kmene [1] a výsledný vztah (32) byl pro praktické účely aproximován jedinou exponenciální funkcí

$$\lambda_s^{\text{ef}} = 0,50 \exp \{0,00233 \cdot (T - 290)\}; \quad [\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}], \quad (25a)$$

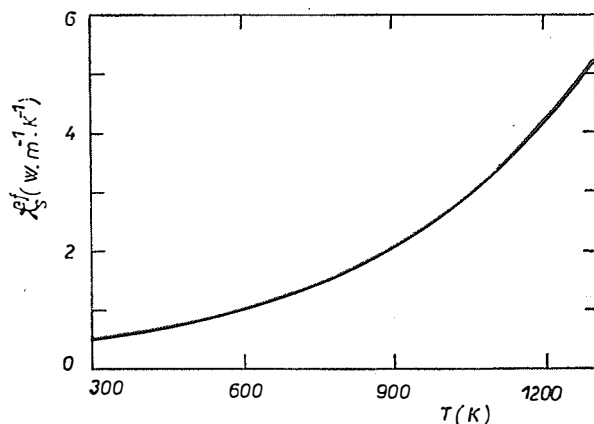
jejíž průběh je znázorněn na obr. 2.

Tepelná vodivost plynné fáze je určena linearizací experimentálních hodnot $\lambda_{\text{CO}_2}(T)$ z literárních pramenů [16] [17] a je dána vztahem

$$\lambda_g(T) = -5,72 \cdot 10^{-4} + 6,756 \cdot 10^{-5}T; \quad [\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}]. \quad (26a)$$

Reakčně transformační teplo H_m bylo určeno na základě několika teoretických [3, 4] i experimentálních [10], [20], [21], [22] údajů (tab. I), z nichž plyne průměrná hodnota

$$H_m = 616.2 \text{ kJ/kg skla.}$$



Obr. 2. Teplotní průběh efektivní tepelné vodivosti λ_s^{ef} kmene pro bílé obalové sklo.

Z údajů v tab. I je zřejmá značná obtížnost stanovení H_m , jelikož experimentální hodnoty se sice navzájem příliš neliší (max. o 15 %), teoretické hodnoty jsou téměř shodné, ale jsou o 23 % vyšší než průměrná experimentální hodnota 572 kJ/kg skla.

Tabulka I

Reakčně transformační teplo H_m
pro bílé obalové sklo

H_m [kJ/kg] skla	Pramen
705	3
704	4
565	10
615	20
582	21
526	22

Stupeň přeměny α byl stanoven na základě analogie procesů probíhajících v tělesovém bodě procházejícím vrstvou kmene a v malém množství kmene v Pt-ke-límku (navážka $M_{s0} = 2\text{g}$) umístěném v píce termogravimetru, přičemž množství plynu uniklé z úseku (x, L) vrstvy kmene jednotkovou plochou za jednotku času (tj. hmotnostní integrální zdroj $R_g(x)$) lze přibližně ztotožnit s celkovým množstvím plynu, které vyprodukuje tělesový bod (jednotkovou plochou) během svého průchodu vrstvou od povrchu do téže hloubky $y = L - x$. Termogravimetrem se měří časová

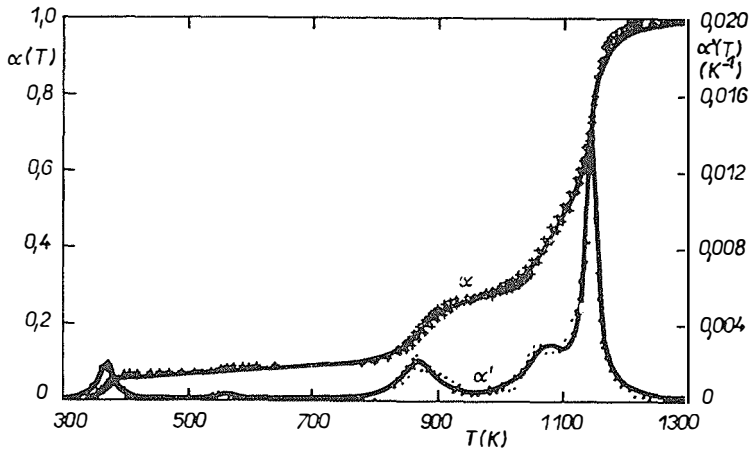
závislost celkové uniklé hmoty plynu $M_g(t)$ z navážky ∇ Pt-keříčku během určitého režimu ohřevu $T = T(t)$, přičemž čas t odpovídá poloze x podle transformačního vztahu (8). Čas t_G je určen dosažením konstantní hodnoty $M_{gG} = M_g(t) = \text{konst.}$ pro $t \geq t_G$ a stupeň přeměny α je dán svým definičním vztahem

$$\alpha(t) = \frac{M_g(t)}{M_{gG}},$$

ve kterém se pro účely dalšího zpracování provede transformace $\alpha(t) \rightarrow \alpha(T)$ pomocí definované funkce ohřevu $T = T(t)$. Přitom bylo zjištěno, že pro rozsah rychlostí ohřevu $0,04$ až $0,10 \text{ K} \cdot \text{s}^{-1}$ je průběh křivky $\alpha(T)$ prakticky stejný a teplota ukončení procesu je dána přibližně stejnou hodnotou $T_G = 1273 \text{ K}$.

Při analytickém matematickém vyjádření funkcí $\alpha(T)$ a $f(T) = \alpha'(T)$ bylo z hlediska zpřesnění separace jednotlivých kinetických procesů postupováno tak, že nejprve byla provedena numerická derivace experimentální křivky $\alpha(T)$, na níž bylo potom rozlišeno celkem 5 různých kinetických procesů, jejichž profily (poloha T_{mI} , výška

f_{mI} , pološířka ΔT_I) byly proloženy funkce (33); jejich součtem byl pak získán analytický tvar $f(T)$ daný vztahem (27). Dílčí funkce (34) stupně přeměny $\bar{\alpha}_I(T)$ byly získány přímo analytickou integrací profilových funkcí (33) a velikosti intervalů $\Delta\alpha_I$ byly stanoveny několikerou iterací na experimentálních křivkách $\alpha(T)$ a $\alpha'(T)$. Výsledný tvar analytických funkcí (27) a (28) spolu s experimentálními body dvou TG měření je na obr. 3 a hodnoty konstant T_{mI} , f_{mI} , ΔT_I , $\Delta\alpha_I$ jsou uvedeny v tab. II.



Obr. 3. Průběh funkcí $\alpha(T)$ a $f(T)$ určený z TG měření při rychlosti ohřevu $0,04$ a $0,08 \text{ K} \cdot \text{s}^{-1}$ (křížky a tečkami jsou označeny experimentální hodnoty a plnou čarou proložené funkce).

Nakonec lze z TG měření stanovit teoretickou hodnotu faktoru p ve vztahu (29), a to za předpokladu, že celkový poměrný hmotnostní úbytek navážky kmene v keříčku po skončení TG měření se rovná poměrnému stacionárnímu hmotnostnímu úniku plynu z vrstvy kmene, tedy z rovnice

$$\frac{Q_B - Q_G}{Q_B} = \frac{M_{gG}}{M_{s0}},$$

ze které pro p plyne vztah

Tabulka II

Parametry funkcí $\alpha(T)$ a $f(T)$

Kine- tický proces I	f_{mI} [K ⁻¹]	T_{mI} [K]	ΔT_I [K]	$\Delta \alpha_I$
1	0,00191	370,0	27,3	0,065
2	0,00025	557,7	35,0	0,012
3	0,0020	869,2	60,0	0,167
4	0,0025	1075,0	80,0	0,314
5	0,0137	1146,0	25,0	0,442

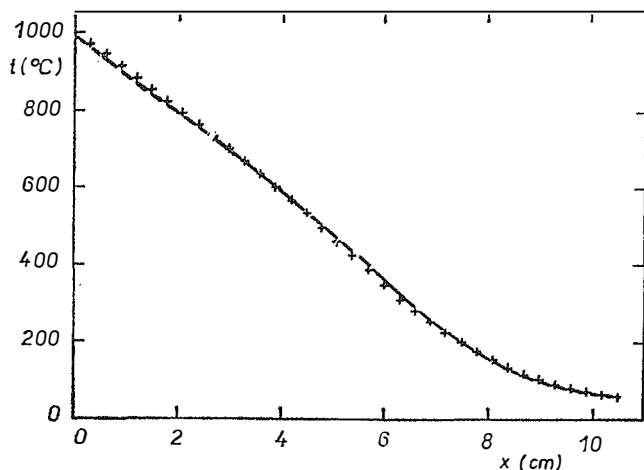
$$p = \frac{Q_B}{Q_G} = \frac{M_{s0}}{M_{s0} - M_{gG}} \quad (53)$$

Konkrétně byl při navážce $M_{s0} = 2$ g naměřen úbytek $M_{gG} = 0,404$ g tedy $p = 1,25$

8. KONKRÉTNÍ VÝPOČTY ROZLOŽENÍ TEPLoty VE VRSTVĚ KMENE

Výpočet rozložení teploty $T(x_i)$ podle rovnic (48) a (17a), (18a), (19a) byl realizován na stolním kalkulátoru Hewlett Packard 9810A s využitím kreslicího zařízení a pří-
davné kazetové paměti.

Pro modelové výpočty bylo zvoleno tavení výše uvedeného kmene pro bílou obalovou sklovinu v elektrické peci o výkonu 30t/24 h se zakládací plochou 16,94 m², přičemž se jako neměnné zachovávaly tyto parametry tavení: kinetika tavení daná rovnicemi (27) a (28) s konstantami uvedenými v tab. II., průběhy měrných tepel (22a), (22b), (23a), (23b), hustoty (24a), tepelných vodivostí (25a), (26a), teplota $T_F = 30$ °C zakládání kmene, efektivní koeficient přestupu tepla $\beta = 10$ W · K⁻¹ · m⁻², faktor zakládání $p = 1,15$ a rozměrový krok $\Delta l = 0,3$ cm.



Obr. 4. Rozložení teploty ve vrstvě kmene vypočtené metodou konečných diferencí (plná čára) a analytiko-numerickým způsobem (křížky).

Nejprve byly provedeny porovnávací výpočty rozdělení teploty ve vrstvě kmene, a to analyticko-numerickým způsobem a metodou konečných diferencí ($\delta = 1,5$ s, $\Delta = 0,3$ cm, $\varepsilon = 0,0025$ °C). Z průběhu vypočtených křivek na obr. 4 (výpočet ozn. a, b v tab. III) je zřejmé, že rozdělení teploty získané pomocí obou metod je prakticky shodné (liší se průměrně o 1 %, v několika málo bodech maximálně o 5 %), a proto byla pro praktické aplikace dále používána rychlejší analyticko-numerická metoda výpočtu.

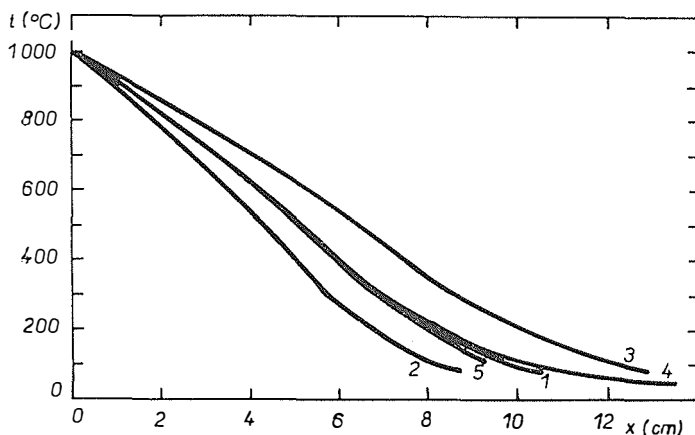
Pro ilustraci praktické práce s modelem byl sledován vliv změn veličin Q_B (spolu se stejnou změnou $Q_G = Q_B/p$), q_G a H_m na průběh rozdělení teploty ve vrstvě kmene

Tabulka III
Parametry modelových výpočtů tavení kmene

Vstupní a výstupní veličiny	Označení modelového výpočtu									
	a	b	1	2	3	4	5	6	7	8
Odběr [kg . s ⁻¹ . m ⁻²] Q_G	0,0222	0,0222	0,0205	0,0246	0,0164	0,0208	0,0202	0,0205	0,0205	0,0205
Vlhkost [% vody] w	4,0	4,0	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
Spotřeba tepla [kJ/kg skla]:										
Odpaření vody H_w	108,3	108,3	64,9	64,9	64,9	64,9	64,9	64,9	64,9	64,9
Tavení kmene H_m	616,0	616,0	616,0	616,0	616,0	616,0	616,0	616,0	616,0	616,0
Měrné tepelné toky [kW . m ⁻²]										
Rozhraní kmen- sklovina q_G	45,00	45,01	41,22	49,43	33,02	41,22	41,22	42,05	42,87	40,81
Ztráty z povrchu kmene q_B	1,06	0,99	1,68	1,98	1,39	0,42	2,78	3,18	4,69	0,93
Okrajové teploty [°C]:										
Rozhraní kmen- sklovina T_G	1000	987,2	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Povrch vrstvy kmene T_B	58,6	55,9	80,0	80,0	80,0	43,3	107,0	115,7	149,9	61,5
Zakládání kmen T_F	27,0	27	30	30	30	30	30	30	30	30
Okolí nad kmenem T_A	50,0	50	60	60	60	40	60	60	60	60
Doba tavení kmene [min] t_G	115	115	131	91	202	156	124	116	107	143
Tloušťka vrstvy kmene [cm] L	10,5	10,5	10,5	8,7	12,9	13,5	9,6	9,0	8,1	11,7

vzhledem ke zvolenému základnímu stavu, jež má označení *I* v tab. III. a na obrázcích 5, 6.

Změna zakládání Q_B ($0 \pm 20\%$), doprovázená stejnou změnou odběru Q_G , při zachování konstantní povrchové teploty $T_B = 80^\circ\text{C}$ si vynutí procentově stejnou změnu dodávaného měrného tepelného toku q_G ($0 \pm 20\%$), jež vyvolá poněkud menší změnu ztrát q_B ($0 \pm 17\%$) z povrchu vrstvy, opačnou nesymetrickou změnu tloušťky vrstvy L ($0 -17\%$ a $+23\%$) a doby tavení t_G ($0 -31\%$ a $+54\%$), viz výpočty č. 2, 3 v tab. III a na obr. 5. Naproti tomu velmi malá změna Q_B ($0 \pm 1,5\%$) při zachování konstantního měrného tepelného toku q_G (což odpovídá stálosti elektrického příkonu elektrod) vyvolá již značné nesymetrické změny tloušťky vrstvy L ($0 +29\%$ a -9%), doby tavení kmene ($0 +19\%$ a -5%) a opačné změny povrchové teploty ($0 -46\%$ a $+34\%$) a ztrát z povrchu kmene q_B ($0 -75\%$ a $+65\%$), jak plyne z výpočtů č. 4, 5 v tab. III a na obr. 5. Z těchto výpočtů je zřejmá možnost snadného vzniku protavů způsobených nepatrnými změnami, popřípadě i nehomogenitou zakládání kmene.



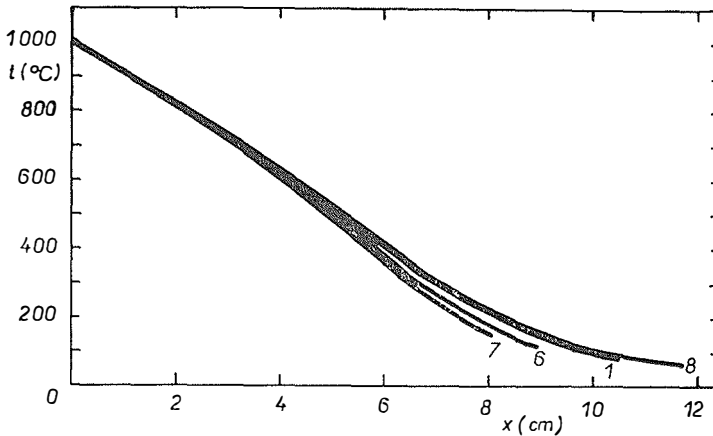
Obr. 5. Vliv změn zakládání Q_B na rozložení teploty ve vrstvě kmene (Vysvětlivky ke křivkám č. 1, 2, 3, 4, 5 v tab. III.).

Malá změna dodávaného měrného tepelného toku q_G ($0 +2\%$, $+4\%$, -1%), odpovídající změně elektrického příkonu elektrod, při zachování konstantních hodnot všech ostatních veličin vyvolá značnou změnu povrchové teploty T_B ($0 +45\%$, $+87\%$, -23%), ztrát q_B z povrchu vrstvy ($0 +89\%$, $+180\%$, -45%) a opačnou změnu tloušťky vrstvy L ($0 -14\%$, -23% , $+11\%$) a doby tavení kmene t_G ($0 -12\%$, -18% , $+9\%$), jak plyne z výpočtů 6, 7, 8 v tab. III a na obr. 6. Zde je opět zřejmý snadný vznik protavů vrstvy kmene při nepatrném zvýšení příkonu pece.

V některých případech lze k rozboru tavení kmene použít přímo analytických vztahů (44), (45), (47), (39) a (43) okrajových podmínek. Tímto způsobem byl modelově sledován vliv variabilnosti reakčně transformačního tepla H_m na potřebné změny dodávaného tepelného toku q_G . Při stálosti všech ostatních veličin a pro konstantní povrchovou teplotu $T_B = 80^\circ\text{C}$ byla postupem add c) kap. 5 a s využitím vztahu (51) pro výpočet celkové měrné spotřeby tepla H stanovena závislost q_G na H_m , pro niž vychází lineární vztah

$$q_G = 29,42 + 1,916 \cdot 10^{-2} \cdot H_m; \quad [q_G] = \text{kW/m}^2; \\ [H_m] = \text{kJ/kg skla,} \quad (54)$$

přičemž ztráty z povrchu kmene zachovávají konstantní hodnotu $q_B = 1,68 \text{ kW/m}^2$. Z této rovnice (54) plyne např. potřebná změna dodávané energie (vyjádřená pomocí hodnot q_G) o $\pm 5,7\%$ při změně reakčně transformačního tepla H_m o $\pm 20\%$, jež odpovídá možné nepřesnosti při jeho stanovení, viz tab. I.



Obr. 6. Vliv změny dodávaného měrného tepelného toku q_G na rozložení teploty ve vrstvě kmene (Vysvětlivky ke křivkám č. 1, 6, 7, 8 v tab. III.).

9. ZÁVĚR

Pro sledování průběhu tavení kmene v elektrických pecích byl vytvořen matematický stacionární model zahrnující proměnné materiálové veličiny a kinetiku tavení. Pro jeho používání byly odvozeny dvě matematické metody výpočtu, jimiž lze při volených okrajových podmínkách stanovit rozdělení teploty ve vrstvě, tloušťku vrstvy a dobu vertikálního tavení kmene. Pro konkrétní výpočty je však nutno vždy provést TG měření příslušných kmenů a jeho zpracováním stanovit teplotní průběh stupně přeměny $\alpha(T)$ a derivační funkce $\alpha'(T)$.

V kap. 8 bylo provedeno několik aplikačních výpočtů tavení kmene pro bílé obalové sklo v 30ti tunové elektrické vertikální peci. Modelově byly stanoveny některé příčiny vzniku protavů, jež mohou vznikat nepatrným snížením (cca o 2%) zakládání, nebo zvýšením (cca o 5%) příkonu pece. Dále bylo zjištěno, že variabilitnost reakčně transformačního tepla H_m má poměrně malý vliv na průběh tavení kmene, např. při změně H_m o $\pm 10\%$ plyne ze vztahu (54) při požadavku zachování konstantní povrchové teploty T_B nutná změna příkonu o 2,8%. Na obrázcích 5 a 6 jsou přehledně ilustrovány změny průběhů rozdělení teploty a tloušťky vrstvy L v závislosti na změnách zakládání a příkonu pece.

Uvedený model je také možno využívat ke stanovení změn průběhu tavení kmene vyvolaných různými technologickými zásahy, nebo změnami okrajových podmínek.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛАВКИ ШИХТЫ
В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЕЧАХ

Часть II. Решение модельных уравнений

Петр Шилл

Государственный научно-исследовательский институт стекла, Грдец Кралоге

Разработаны два математических метода (аналитико-численный и чисто численный методом конечных разностей) по решению модельного уравнения (17), выведенного в 1-ой части статьи. Дальше для шихты для белой тарной стекломассы описано экспериментальное определение всех материальных функций (20—28), включая параметры (таблица II) по вычислению кинетики плавки, т. е. функций $\alpha(T)$ и $f(T)$. Так как решение методом конечных разностей с фиктивным временем τ по уравнениям (17a), (18a), (19a) требует большой затраты времени и было установлено (рис. 4, вычисление, обозначенное а, б в таблице III) хорошее совпадение с аппроксимирующим аналитико-численным методом решения дальше аналитико-численный метод.

С помощью примененных вычислений хода плавки указанной шихты в электрической печи варочной способностью в 30 т были определены изменения толщины L-слоя шихты, времени плавки t_G и снабженного удельного теплового потока q_G в зависимости от модельно вызванных изменений загрузки Q_B , снабженной потребляемой мощности q_G и переменности теплоты реакций и превращений H_m , см. рис. 5, 6 и вычисления, обозначенные 1—8 в таблице III. С помощью модели были определены критические изменения загрузки Q_B (на — 2 %) и снабженной потребляемой мощности q_G (на + 5 %) для образования проваров при сохранении постоянных величин всех других технологических параметров. Наконец с помощью модели установили относительно небольшое влияние переменности трудно определяемой теплоты H_m на ход плавки шихты и определена зависимость (54) нужной потребляемой мощности q_G от величины H_m для указанной шихты и печи при требовании стабильности температуры поверхности шихты $T_B = 80$ C. Из указанной зависимости вытекает напр. изменение q_G только на $\pm 2,8$ % при изменении H_m на ± 10 %.

Рис. 2. Поведение температурной зависимости эффективной теплопроводности $\lambda_{\text{эф}}$ шихты для тарного белого стекла.

Рис. 3. Поведение функций $\alpha(T)$ и $f(T)$, определенное из термогравиметрических измерений при скорости нагрева $0,01$ и $0,08$ K · s⁻¹ (крестики и пункты обозначают экспериментальные данные и сплошная кривая аппроксимирующие функции).

Рис. 4. Распределение температуры через слой шихты, вычисленное методом конечных разностей (сплошная кривая) и аналитико-численным методом (крестики).

Рис. 5. Влияние изменений загрузки Q_B на распределение температуры через слой шихты (объяснение к кривым № 1, 2, 3, 4, 5 в таблице III).

Рис. 6. Влияние изменений снабженного удельного теплового потока q_G на распределение температуры через слой шихты (объяснение к кривым № 1, 6, 7, 8 в таблице III).

MATHEMATICAL MODEL OF BATCH MELTING IN
ALL-ELECTRIC FURNACES, PART II. SOLUTION OF
MODEL EQUATIONS

Petr Schill

State Glass Research Institute, Hradec Králové

Two mathematical methods (analytic-numerical and purely numerical by finite differences method) for the solution of the model equation (17) derived in the 1st part of this paper are worked out. Further on, an experimental determination of all material functions (20—28) including the parameters (tab. II) for the kinetic melting calculation, i.e. of the functions $\alpha(T)$ and $f(T)$ for the batch for white container glass melt is described. As the solution by the finite differences method with the fictive time τ , according to the equations (17a), (18a), (19a), is time consuming and as a good agreement (fig. 4, calculation noted a, b in tab. III) with the solution of approximative analytic-numerical method, according to the equation (48) with boundary conditions (44—47), was found, the analytic-numerical method for the application calculations was being used on.

By means of application calculations of the melting behaviour of the given batch in an all-electric furnace of 30-t output the changes in thickness of the L batch layer, in the melting time t_G and in the supplied specific heat flux q_G in dependence on the model induced charging changes Q_B , on the supplied input q_G and on the variability of the reaction-conversion heat H_m were determined; see fig. 5, 6 and the calculations noted 1—8 in tab. III. By means of a model the critical changes of the charging Q_B (by -2%) and of the supplied input q_G (by $+5\%$), inducing the batch-free melt, while holding the constant values of all other technological parameters, were determined.

Finally, by means of a model a relative small influence of the variability of the difficult determinable reaction-conversion heat H_m on the batch melting behaviour was found out and the dependence (54) of the needed input q_G on the amount of H_m for the given batch and furnace, while requiring the constant surface temperature of the batch $T_B = 80^\circ\text{C}$, was determined. The given relation resulted for instance in the change of q_G by only $\pm 2,8\%$ if H_m was changed by $\pm 10\%$.

Fig. 2. Temperature dependence of effective thermal conductivity λ_x^e of the batch for white container glass.

Fig. 3. Functions $\alpha(T)$ and $f(T)$ derived from TG measurements performed at the heating rate of $0,04$ and $0,08\text{ K} \cdot \text{s}^{-1}$ (crosses and dots designate the experimental values and full lines the fitted functions).

Fig. 4. Temperature distributions in the batch layer calculated by means of the method of finite differences (full line) and with the analytic-numerical method (crosses).

Fig. 5. Influence of changes of the filling Q_B upon temperature distribution in the batch layer (curves designated by No. 1, 2, 3, 4, 5, see Table III.).

Fig. 6. Influence of changes of the supplied heat flux q_G upon the temperature distribution in the batch layer (curves designated by No. 1, 6, 7, 8, see Table III.).