Silikáty 30, s. 239—242 (1986)

Stručné původní sdělení

NUMERICKÁ METODA URČENÍ BODU MĚKNUTÍ SKLA PODLE LITTLETONA

ZBYNĚK SOKOL

Ústav fyziky atmosféry ČSAV, Boční II. č. p. 1401
141 00 Praha 4-Spořilov

Došlo 2. 4. 1985

V práci je popsána metoda aproximace závislosti prodloužení skleněného vlákna a teploty na čase založená na metodě hlazení naměřené diskrétní závislosti a užití klasických kubických polynomiálních splinů. Popsaná metoda umožňuje rychlé vyhodnocení měření pro stanovení Littletonova bodu.

ÚVOD

Pro sklářskou výrobu je významným faktorem znalost viskozity skla v závislosti na teplotě. Umožňuje posuzování vhodnosti skloviny pro zvolený druh výroby jak z hlediska jejího tavení a čeření, tak i z hlediska jejího zpracování. Avšak proměření celého průběhu teplotní závislosti viskozity je časově náročné. Proto se v praxi často měří jen jednotlivé vztažné viskozitní body, jako např. teplota Littletonova bodu měknutí [1]. Vyhodnocování naměřených hodnot prodlužování vlákna a příslušné teploty v závislosti na čase se běžně provádí graficky [1].

Předložená práce se zabývá numerickým řešením tohoto problému s využitím počítače.

NUMERICKÉ ŘEŠENÍ

Matematicky můžeme problém určení Littletonova bodu měknutí skla formulovat následujícím způsobem. Označme $L = L(t)$ funkční závislost celkového prodloužení skleněného vlákna na čase t a $T = T(t)$ závislost růstu teploty na čase t. Nechť jsou dány naměřené hodnoty celkového prodloužení skleněného vlákna $\tilde{L}_j$ v čase $t_j = 0{,}5j$, $j = 0, \ldots, N_L$ a naměřené hodnoty teploty $\tilde{T}_i$ v čase $s_i = 0{,}5i + 0{,}25$, $i = 0, \ldots, N_T$. Nechť je dále dána směrnice tečny α (pro Littletonův bod $\alpha = 1$). Potom funkční hodnota $T_V = T(\tau)$, kde τ je řešením rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L(\tau) = \alpha \qquad \text{pro } \tau \in \langle s_0, \min (t_{N_L}, s_{N_T}) \rangle, \tag{1}$$

je hledanou teplotou.

Numerická metoda řešení tohoto problému je založena na aproximaci funkcí L a T klasickými kubickými polynomiálními spliny (KKPS) [2] s uzlovými hodnotami $L(t_j)$, $j = 0, \ldots, N_L$ a $T(s_i)$, $i = 0, \ldots, N_T$.

Funkční závislost $L = L(t)$ resp. $T = T(t)$ je dána diskrétně naměřenými hodnotami $\tilde{L}_j$, $j = 0, \ldots, N_L$ resp. $\tilde{T}_i$, $i = 0, \ldots, N_T$, které jsou v důsledku nepřesnosti měření zatíženy náhodnými chybami. K určení hodnot $L(t_j)$, $j = 0, \ldots, N_L$ použijeme metodu hlazení diskrétní naměřené závislosti polynomem druhého stupně. Pěti po sobě následujícími hodnotami L_{j-2}, L_{j-1}, L_j, L_{j+1}, L_{j+2} proložíme metodou nejmenších čtverců polynom druhého stupně a jeho funkční hodnotu v čase t_j označíme $\bar{L}_j$. Snadno lze odvodit vztah

$$\bar{L}_j = -\frac{3}{35}(L_{j-2} + L_{j+2}) + \frac{12}{35}(L_{j-1} + L_{j+1}) + \frac{17}{35}L_j, \quad j = 2, \ldots, N_L - 2.$$

K určení hodnot $\bar{L}_0, \bar{L}_1$ resp. $\bar{L}_{N_L-1}, \bar{L}_{N_L}$ použijeme polynomu druhého stupně proloženého hodnotami $L_j, j = 0, \ldots, 4$ resp. L_j, $j = N_L - 4, \ldots, N_L$. Označíme-li

$$a_1 = \frac{1}{14}\sum_{j=-2}^{2} j^2 L_{2+j} - \frac{1}{7}\sum_{j=-2}^{2} L_{2+j},$$

$$b_1 = \frac{1}{10}\sum_{j=-2}^{2} j L_{2+j},$$

$$c_1 = \frac{17}{35}\sum_{j=-2}^{2} L_{2+j} - \frac{1}{7}\sum_{j=-2}^{2} j^2 L_{2+j},$$

$$a_2 = \frac{1}{14}\sum_{j=-2}^{2} j^2 L_{N_L-2+j} - \frac{1}{7}\sum_{j=-2}^{2} L_{N_L-2+j},$$

$$b_2 = \frac{1}{10}\sum_{j=-2}^{2} j L_{N_L-2+j},$$

$$c_2 = \frac{17}{35}\sum_{j=-2}^{2} L_{N_L-2+j} - \frac{1}{7}\sum_{j=-2}^{2} j^2 L_{N_L-2+j},$$

pak platí vztahy

$$\bar{L}_0 = 4a_1 - 2b_1 + c_1, \qquad \bar{L}_1 = a_1 - b_1 + c_1,$$
$$\bar{L}_{N_L} = 4a_2 + 2b_2 + c_2, \qquad \bar{L}_{N_L-1} = a_2 + b_2 + c_2.$$

Hodnoty $\bar{L}_j$ lze opět považovat za hodnoty zatížené náhodnými chybami. Položíme-li $L_j = \bar{L}_j$, $j = 0, \ldots, N_L$, můžeme celý postup opakovat. Protože náhodné chyby mají oscilační charakter, každé provedení uvedeného postupu omezuje jejich vliv, avšak vícenásobným opakováním může dojít k potlačení (zhlazení) některých podstatných rysů funkční závislosti. V našem případě je kritériem pro počet opakování požadavek, aby byly splněny nerovnosti

$$L_{j+1} - L_j > L_j - L_{j-1}, \qquad j = 1, \ldots, N_L - 1, \tag{2}$$

protože pak funkce L_h, získaná aproximací funkce L KKPS s uzlovými hodnotami $L(t_j) = L_j$, $j = 0, \ldots, N_L$ a krajními derivacemi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L(t_0) = (-21L_0 + 13L_1 + 17L_2 - 9L_3)/20,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L(t_{N_L}) = (21L_{N_L} - 13L_{N_L-1} - 17L_{N_L-2} + 9L_{N_L-3})/20$$

bude konvexní, což je plně v souladu s jejím fyzikálním významem. Hodnoty krajních derivací jsou dány derivacemi polynomu druhého stupně proloženého metodou nejmenších čtverců hodnotami L_j, $j = 0, \ldots, 3$ resp. L_j, $j = N_L - 3, \ldots, N_L$. Na základě praktických výpočtů se vzhledem k podmínce (2) ukázalo vhodné dvojnásobné opakování, neboť očividně chybně naměřené hodnoty se uvedeným postupem výrazně změnily, zatímco ostatní hodnoty zůstaly v podstatě nezměněny. Analogicky postupujeme v případě funkce T s tím rozdílem, že vzhledem k charakteru průběhu teploty a požadované přesnosti je dostatečné provést hlazení jen jednou.

Aproximací funkcí L a T KKPS dostaneme hodnoty derivací aproximujících funkcí L_h a T_h v uzlových bodech, tj. hodnoty $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L_h(t_j)$, $j = 1, \ldots, N_L - 1$ a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T_h(s_i)$, $i = 1, \ldots, N_T - 1$. Protože funkce L_h je na každém intervalu $\langle t_{j-1}, t_j \rangle$ polynomem třetího stupně, je na tomto intervalu jednoznačně určena hodnotami L_{j-1}, L_j, $L'_{j-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L_h(t_{j-1})$ a $L'_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L_h(t_j)$. Pro $t \in \langle t_{j-1}, t_j \rangle$ platí

$$L_h(t) = 8a(t - t_{j-1})^3 + 4b(t - t_{j-1})^2 + 2c(t - t_{j-1}) + d, \tag{3}$$

kde

$$\begin{aligned} a &= 2(L_{j-1} - L_j) + L'_{j-1} + L'_j, \qquad & c &= L'_{j-1}, \\ b &= 3(L_j - L_{j-1}) - 2L'_{j-1} - L'_j, \qquad & d &= L_{j-1}. \end{aligned} \tag{4}$$

V důsledku konvexnosti funkce L_h je rovnice (1), kde funkci L nahradíme funkcí L_h, snadno řešitelná a pokud řešení existuje, je určeno jednoznačně. Vztah (1) vede k řešení kvadratické rovnice. Při výpočtu funkční hodnoty $T_V = T_h(\tau)$ se použijí analogické vztahy pro T_h jako jsou vztahy (3) a (4).

HODNOCENÍ VÝSLEDKŮ

Navržená numerická metoda byla naprogramována v jazyce FORTRAN (program je k dispozici u autora) a na programovatelné kalkulačce HP-41 C. Programem byla zpracována sada naměřených hodnot pro několik druhů skel (opálové křemičité sklo, alkalicko-olovnato-křemičité sklo, borito-křemičité sklo) získaných v oddělení skla k. p. Tesla Holešovice. Vypočtené teploty pro tečny se směrnicemi 0,5, 1,0 (Littletonův bod měknutí skla) a 2,0 jednotlivých vzorků byly porovnány s teplotami určenými graficky. Zjištěné rozdíly u většiny případů nepřesahovaly 1,5 °C. Při analýze ojedinělých větších rozdílů byla zjištěna nepřesnost grafického vyhodnocení.

Na základě provedených výpočtů lze konstatovat, že navržená numerická metoda je z hlediska přesnosti [1] vhodná pro praktické využití.

ZÁVĚR

Na rozdíl od doposud běžného způsobu určení Littletonova bodu měknutí skla je v práci nahrazena grafická metoda metodou numerickou, založenou na aproximaci závislosti prodloužení skleněného vlákna a teploty na čase. Aproximace spočívá v opakovaném hlazení diskrétní experimentální závislosti polynomem druhého stupně za použití čtyř sousedních bodů a užití klasických kubických polynomiálních splinů. Tento způsob dává dostatečně přesnou aproximaci libovolných závislostí.

Numerická metoda umožňuje rychlé nalezení Littletonova bodu použitím i stolní výpočetní techniky s vyloučením chyb způsobených subjektivností grafického zpracování.

Ze srovnání výsledků získaných oběma metodami vyplývá, že při pečlivém grafickém zpracování jsou v podstatě totožné.

Předností navržené metody je mimo jiné skutečnost, že nevyžaduje lineární vzestup teploty, který je v praxi obtížně realizovatelný.

Poděkování

Autor děkuje ing. F. Kolářovi a ing. Z. Bartoňovi z k. p. Tesla Holešovice za poskytnutí experimentálních údajů.

Literatura

[1] Šašek L. a kol.: *Laboratorní metody v oboru silikátů*, 1. vyd., str. 196—197. SNTL, Praha 1981.

[2] Makarov V. L., Chlobystov V. V.: *Splajn — approximacija funkcij*, Vysšaja škola, Moskva 1983.

[3] Lancoš K.: *Praktičeskije metody prikladnogo analiza*, str. 341—347. Gosudarstvennoje izdatelstvo fiziko-matematičeskoj literatury, Moskva 1961.

НУМЕРИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЧКИ РАЗМЯГЧЕНИЯ СТЕКЛА ПО ЛИТТЛЕТОНУ

Збинек Сокол

Институт физики атмосферы ЧСАН,
Бочни 1401, 141 00 Прага—Спорживов

Метод основывается на апроксимации зависимости удлинения стеклянного волокна и температуры от времени. Апроксимация заключается в повторяемом сглаживании дискретной измеренной зависимости полиномом второй степени с применением четырех соседних величин и при помощи классических кубических сплайнов. Метод программируется на языке ФОРТРАН и на микро-ЭВМ HP-41C. Метод тестировали набором измеренных величин нескольких типов стекол (опаловое силикатное стекло, щелочно-свинцово-силикатное стекло, боросиликатное стекло). Сопоставляя результаты, полученные с помощью предлагаемых нумерического и графического методов, было показано, что разность не выше 1,5 °C.

NUMERICAL METHOD OF SOFTENING POINT DETERMINATION AFTER LITTLETON

Zbyněk Sokol

Institute of the Physics of Atmosphere, Czechoslovak Academy of Sciences,
141 00 Prague 4

The method is based on approximation of the dependence of glass fibre elongation and temperature on time. The approximation involves repeated smoothing of the discrete experimental relationship by a second degree polynomial using four neighbouring values and classical cubic splines. A program has been written in the Fortran language and for the HP-41C programmable calculator.

The method was tested on a series of experimental values obtained with several types of glasses (opal silicate glass, alkali-lead-silicate glass, borosilicate glass). A comparison of results obtained by the suggested numerical and graphic method showed that the difference did not exceed 1.5 °C.