

VÝPOČET DYNAMICKÉ PEVNOSTI V OHYBU MĚŘENÉ NÁRAZEM NA SKLO

VLADIMÍR NOVOTNÝ, ALEŠ VOJTĚCH

Státní výzkumný ústav sklářský, Škroupova 957, 501 92 Hradec Králové

V článku jsou uvedeny vztahy, umožňující vypočítat dynamickou pevnost v ohybu, tj. maximální napětí při měření pevnosti v nárazu, pro tělesa různých, pravidelných tvarů. Pro náraz kyvadlovým kladivem podle Charpyho jsou shrnuty vztahy uváděné v literatuře — pro trámeček obdélníkového, resp. čtvercového průřezu a váleček (tyčinku) — a rozšířeny o obdobné vztahy pro trámeček průřezu rovnoramenného trojúhelníka, šestiúhelníka a trubku. Nově byly odvozeny rovnice pro výpočet dynamické pevnosti v ohybu při nárazu koulí na střed tabule, podepřené v blízkosti okrajů, tvaru kruhu, čtverce, případně obdélníka.

ÚVOD

Skleněné výrobky jsou při používání obvykle mechanicky namáhány nárazem nebo ohybem, skleněné obaly někdy také vnitřním přetlakem. V souladu s tím se u skleněných výrobků měří z mechanických vlastností nejčastěji pevnost v nárazu a v ohybu, případně — u obalů — též pevnost ve vnitřním přetlaku.

V tomto článku jsme se zaměřili na možnost výpočtu maximálního napětí při měření pevnosti v nárazu, tj. na výpočet dynamické pevnosti v ohybu. Shrnutí jsme údaje uváděné v literatuře pro náraz kyvadlovým kladivem a rozšířili je o vztahy pro trámeček průřezu rovnoramenného trojúhelníka, šestiúhelníka a trubku. Nově jsme odvodili potřebné rovnice pro náraz koulí na tabuli (desku) tvaru kruhu, čtverce, případně obdélníka, podepřenou v blízkosti okrajů. Výsledné vztahy jsme upravili do tvarů vhodných k provedení výpočtů.

ZÁKLADNÍ POJMY, JIMIŽ JE VYJADŘOVÁNA PEVNOST SKEL PŘI NAMÁHÁNÍ NÁRAZEM

Mírou pevnosti tuhých látek, tedy i skla, je velikost mechanického namáhání, při němž se materiál rozruší — zlomí, praskne nebo se rozdrtí.

Pevnost v nárazu je definována jako práce vykonaná při nárazu, při němž zkoušený vzorek praskl. Vztahuje se k danému uspořádání zkoušky. Vyjadřuje se v J nebo mJ.

Při nárazu zkušebním tělesem padajícím volným pádem se často pro zjednodušení udává jen výškou volného pádu v cm, z níž se vzorek daným tělesem rozbil.

Měřili se práce *spotřebovaná* při nárazu, určí se pevnost v ohybu rázem. Pevnost v ohybu rázem (rázová houževnatost) je vyjadřována prací spotřebovanou k přeražení nebo rozbití zkušebního tělesa, vztaženou na plochu jeho průřezu, resp. na objem vzorku mezi opěrami. Vyjadřuje se v J · m⁻² nebo v Pa · m, resp. v J · m⁻³ nebo Pa.

Dynamická pevnost v ohybu je definována jako (maximální) napětí, při němž praskl vzorek, namáhaný v ohybu nárazem. Vyjadřuje se v Pa nebo (častěji) v MPa.

Jednotlivé metody, jimiž lze měřit dynamickou pevnost skla v ohybu a příslušné výpočtové vztahy jsou uvedeny v následujících kapitolách.

NÁRAZ KYVADLOVÝM KLADIVEM NA TRÁMEČEK OBDÉLNÍKOVÉHO,
RESP. ČTVERCOVÉHO PRŮŘEZU

Měření se provádí kyvadlovým kladivem podle Charpyho [1—3]. Kladivo, opatřené výřezem s klínovitým nosem, je upevněno na výkyvném ramenu. Po spuštění ze zdvižené polohy volně kývá ve vertikálním směru. Zkušební vzorek ve tvaru trámku nebo úzké destičky, opřený na dvou místech, se přeráží při průchodu kladiva spodní nulovou polohou a kladivo pokračuje dále v kyvu. V okamžiku nárazu se ocelový nos dotýká celé čelní plochy trámku, resp. destičky. Přístrojem lze určit nespoteřebovaný podíl původní energie kladiva, tj. výšku, do níž se kladivo překývne po přeražení vzorku.

Práce A spotřebovaná k přeražení resp. rozbití vzorku se vypočte ze vztahu

$$A = G(H - h), \quad (1)$$

kde A = spotřebovaná práce v J,

G = tíha kladiva v N (= hmotnost kladiva v kg \times 9,807 m \cdot s⁻²),

H = výška těžiště kladiva nad spodní nulovou polohou před nárazem v m,

h = výška těžiště kladiva nad spodní nulovou polohou po nárazu (vzniklá překývnutím kladiva po přeražení vzorku) v m.

Pevnost v ohybu rázem se vypočte ze vztahu

$$a = \frac{A}{F}, \quad (2)$$

kde a = pevnost v ohybu rázem v MJ \cdot m⁻², resp. MPa \cdot m,

F = plocha průřezu vzorkem v mm².

Někdy se pevnost v ohybu rázem vztahuje na objem vzorku mezi opěrami. Označuje se pak a_z a vypočte se ze vztahu

$$a_z = \frac{A}{F \cdot l} \cdot 10^3, \quad (3)$$

kde a_z = pevnost v ohybu rázem v MJ \cdot m⁻³, resp. MPa,

l = vzdálenost opěr v mm.

Vztah pro výpočet dynamické pevnosti v ohybu σ_{pr} odvodil Preston [4]:

$$\sigma_{pr} = \left(\frac{18EA}{Fl} \right)^{0,5} = \left(\frac{18EA}{V} \right)^{0,5}, \quad (4)$$

kde E = Youngův modul pružnosti daného skla,

V = objem vzorku mezi opěrami.

Dosazujeme-li jednotlivé hodnoty v běžně používaných jednotkách, dostaneme vztah vhodný k výpočtu:

$$\sigma_{pr} = \left(\frac{18\,000EA}{bt\bar{t}} \right)^{0,5} = 134,2 \left(\frac{EA}{bt\bar{t}} \right)^{0,5}, \quad (5)$$

kde σ_{pr} = dynamická pevnost v ohybu v MPa,

E = Youngův modul daného skla v MPa,

A = práce spotřebovaná k přeražení v J,

b = šířka vzorku v mm,

Výpočet dynamické pevnosti v ohybu měřené nárazem na sklo

t = tloušťka vzorku v mm,

l = vzdálenost opěr v mm.

V případě vzorku se čtvercovým průřezem přirozeně $b = t$.

Maximální tahové napětí při ohybu vyvolaném nárazem, odpovídající vztahu (4), vzniká na povrchu vzorku v místě protilehlém dotyku nosu kladiva se vzorkem.

Na určované hodnoty má vliv opracování povrchu a hran.

NÁRAZ KYVADLOVÝM KLADIVEM NA VÁLEČEK (TYČINKU)

Měření se provádí kyvadlovým kladivem podle Charpyho stejným způsobem, jak bylo uvedeno v předcházející kapitole pro vzorek tvaru trámečku.

Pro práci spotřebovanou k přeražení, resp. rozbití vzorku a pevnost v ohybu rázem platí rovněž uvedené vzorce (1) až (3).

Dynamická pevnost v ohybu σ_{pr} se vypočte ze základního vztahu [5]

$$\sigma_{pr} = \left(\frac{3EA t}{W_0 l} \right)^{0,5}, \quad (6)$$

kde W_0 = moment odporu průřezu při ohybu,

t = tloušťka vzorku.

Pro náš případ, tj. kruhový průřez, $t = d$ = průměr vzorku,

$$W_0 = \frac{\pi d^3}{32}. \quad (7)$$

Dosazením do (6) dostaneme

$$\sigma_{pr} = \left(\frac{96EA}{\pi d^2 l} \right)^{0,5} = \left(\frac{24EA}{V} \right)^{0,5}. \quad (8)$$

Dosazujeme-li jednotlivé hodnoty v běžně používaných jednotkách, dostaneme tvar vhodný k výpočtu:

$$\sigma_{pr} = \left(\frac{96\,000EA}{\pi d^2 l} \right)^{0,5} = 309,8 \left(\frac{EA}{\pi d^2 l} \right)^{0,5}, \quad (9)$$

kde σ_{pr} = dynamická pevnost v ohybu v MPa,

E = Youngův modul daného skla v MPa,

A = práce spotřebovaná k přeražení v J,

d = průměr vzorku v mm,

l = vzdálenost opěr v mm,

V = objem vzorku mezi opěrami v mm.

NÁRAZ KYVADLOVÝM KLADIVEM NA ZKUŠEBNÍ VZORKY DALŠÍCH PRAVIDELNÝCH PRŮŘEZŮ

Měření se provádí kyvadlovým kladivem podle Charpyho stejně, jak bylo uvedeno v předcházejících kapitolách.

Práce spotřebovaná k přeražení, resp. rozbití vzorku a pevnost v ohybu rázem se vypočte ze vzorců (1) až (3), dynamická pevnost v ohybu σ_{pr} se vypočte ze

základního vztahu (6). Dosazením příslušného momentu odporu průřezu W např. z [6], s. 237, dostaneme pro:

— vzorek tvaru rovnoramenného trojúhelníka, náraz na vrchol

$$\sigma_{pr} = \left(\frac{72EA}{zvl} \right)^{0,5} = \left(\frac{144EA}{V} \right)^{0,5}, \quad (10)$$

kde z = šířka vzorku (základna trojúhelníkového průřezu),
 v = výška vzorku (výška trojúhelníkového průřezu).

Dosazujeme-li jednotlivé veličiny v běžně používaných jednotkách jako u vztahu (5) a (9), hodnoty z a v v mm, přejde vztah (10) na tvar vhodný k výpočtu:

$$\sigma_{pr} = \left(\frac{72\,000EA}{zvl} \right)^{0,5} \doteq 268,3 \left(\frac{EA}{zvl} \right)^{0,5}, \quad (11)$$

kde σ_{pr} je v MPa;

— vzorek průřezu tvaru šestiúhelníka, náraz na plochu strany

$$\sigma_{pr} = \left(\frac{24\sqrt{3}EA}{5a^2l} \right)^{0,5} \doteq 2,883 \left(\frac{EA}{a^2l} \right)^{0,5} \quad (12a)$$

$$\sigma_{pr} = \left(\frac{21,6EA}{V} \right)^{0,5} \doteq 4,648 \left(\frac{EA}{V} \right)^{0,5}, \quad (12b)$$

kde a = strana šestiúhelníka;

Dosazujeme-li jednotlivé hodnoty v běžně používaných jednotkách jako u vztahu (5) a (9), hodnotu a v mm, přejdou vztahy (12a), (12b) na vztah vhodný k výpočtu:

$$\sigma_{pr} = \left(\frac{24\,000\sqrt{3}EA}{5a^2l} \right)^{0,5} \doteq 91,18 \left(\frac{EA}{a^2l} \right)^{0,5}, \quad (13)$$

— vzorek ve tvaru trubky

$$\sigma_{pr} = \left[\frac{96EAD^2}{\pi l(D^4 - d^4)} \right]^{0,5} = \left[\frac{24D^2EA}{(D^2 + d^2)V} \right]^{0,5}, \quad (14)$$

kde D = vnější průměr trubky,
 d = vnitřní průměr trubky.

Dosazujeme-li jednotlivé veličiny v běžně užívaných jednotkách jako ve vztahu (5) a (9), hodnoty D a d v mm, přejde vztah (14) na tvar vhodný k výpočtu

$$\sigma_{pr} = \left[\frac{96\,000EAD^2}{\pi l(D^4 - d^4)} \right]^{0,5} \doteq 309,8 \left[\frac{EAD^2}{\pi l(D^4 - d^4)} \right]^{0,5}, \quad (15)$$

kde σ_{pr} je v MPa.

NÁRAZ KOULÍ NA KRUHOVOU DESKU

Deska se při zkoušce uloží vodorovně mezi dva kruhové rámy z tuhého materiálu stejného průměru tak, aby ji spodní rám podpíral pouze v blízkosti obvodu, resp. po obvodu. Na střed desky se spouští volným pádem hladká ocelová koule z postupně se zvyšující výšky, až se vzorek rozbije.

Pevnost v nárazu P se vypočte ze vztahu

$$P = GH, \quad (16)$$

kde P = pevnost v nárazu v J ,

G = tíha koule v N (= hmotnost koule v $kg \times 9,807 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$),

H = výška pádu koule v m .

Tato zkouška je obsažena v normách pro brýlová skla dioptrická, ochranná i protisluneční. Vzorek je při zkoušení uložen mezi 2 kroužky z tuhého materiálu, obvykle vnějšího průměru 31,7 mm, vnitřního průměru 25,4 mm. V místě dotyku je na kroužky nalepen kroužek z měkké gumy průřezu $3,2 \times 3,2 \text{ mm}$. (Pokud je sklo vypouklé, je umístěno vypouklou plochou nahoru.) Na střed vzorku se spouští volným pádem ocelová kulička hmotnosti 16,5 g (průměru 15,8 až 15,9 mm), resp. hmotnosti 100 g (průměru 29,0 mm) [7—10].

Odvození vztahu pro výpočet σ_{gr} z jednoduššího modelu napjatosti v kruhové desce

Dynamickou pevnost v ohybu σ_{gr} jsme odvodili nejprve obdobným způsobem jako Preston [4] pro náraz kyvadlovým kladivem na trámček:

Při nárazu koule na sklo dojde k malému prohnutí vzorku, vzorek se deformuje a vytvoří se v něm napětí, o kterém předpokládáme, že lineárně klesá od maxima v místě nárazu ve středu vzorku k podepřenému obvodu, kde je napětí nulové.

Ve skle, ve kterém je napětí, je obsažena energie, která je rovná deformační práci, která byla vykonána, aby toto napětí vzniklo.

Energie q obsažená v jednotce objemu pod napětím σ je rovna práci potřebné k deformaci, při níž napětí roste spojitě od původní nulové hodnoty do jisté konečné hodnoty σ :

$$q = \int_0^{\sigma} \varepsilon \, d\sigma, \quad (17)$$

kde ε = (poměrná) deformace.

Z Hookova zákona plyne $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ a dosazením do vztahu (17) dostaneme

$$q = \int_0^{\sigma} \frac{\sigma}{E} \, d\sigma = \frac{\sigma^2}{2E}. \quad (18)$$

Energie dQ v prvku objemu dV je rovna

$$dQ = \frac{\sigma^2}{2E} \, dV. \quad (19)$$

Napětí v desce po nárazu — σ — jsme vyjádřili pomocí maximální hodnoty σ_m ve středu desky. Napětí σ klesá lineárně s rostoucí vzdáleností x od středu ve směru poloměru — od σ_m ve středu ($x = 0$) až po $\sigma(x) = 0$ pro $x = R$, kde R je vzdálenost podepřeného okraje od středu. Současně klesá napětí lineárně v každé vzdálenosti ve směru kolmém na povrch desky — od povrchu, kde dosahuje maximální hodnoty, až ke střední rovině desky, kde $\sigma(x) = 0$. Napětí $\sigma(x, y)$, tj. v bodě vzdáleném od středu o x a od povrchu o y , lze vyjádřit vztahem:

Novotný, Vojtěch:

$$\sigma_{(x,y)} = \frac{R-x}{R} \frac{y}{\frac{t}{2}} \sigma_m, \quad (20)$$

kde t = tloušťka desky.

Poněvadž rozložení napětí je symetrické kolem středu desky, vyjádříme výhodně prvek objemu vztahem:

$$dV = 2\pi x dx dy. \quad (21)$$

Dosazením do vztahu (19) dostaneme pro energii v v prvku objemu dV

$$dQ = \frac{4\pi x \sigma_m^2}{ER^2 t^2} [(R-x)^2 y^2 dx dy]. \quad (22)$$

Celková energie desky je tedy

$$Q = 2 \frac{4\pi \sigma_m^2}{ER^2 t^2} \int_{y=0}^{\frac{t}{2}} \int_{x=0}^R x(R-x)^2 y^2 dx dy \quad (23)$$

$$Q = \frac{\pi R^2 t}{36E} \sigma_m^2 = \frac{V}{36E} \sigma_m^2, \quad (24)$$

kde V = objem desky uvnitř rámu.

Dynamická pevnost v ohybu $\sigma_{pr} = \sigma_m$. Stejně jako v předcházejících případech určování σ_m lze i v tomto případě zjednodušeně předpokládat, že celková elastická energie desky po nárazu, při němž došlo k rozbití, je rovna energii, která jí byla dodána dopadlou koulí, tj. $Q = P$.

Dynamickou pevnost v ohybu lze pak vyjádřit vztahem

$$\sigma_{pr} = \left(\frac{36EP}{\pi R^2 t} \right)^{0,5} = \left(\frac{36EP}{V} \right)^{0,5}, \quad (25)$$

kde R = vnitřní poloměr rámu.

Dosazujeme-li jednotlivé hodnoty v běžně používaných jednotkách, jako ve vztahu (5) a (9), hodnotu P v J, hodnotu R v mm, dostaneme tvar vhodný k výpočtu:

$$\sigma_{pr} = \left(\frac{36\ 000EP}{\pi R^2 t} \right)^{0,5} \doteq 189,7 \left(\frac{EP}{\pi R^2 t} \right)^{0,5} \doteq 107 \left(\frac{EP}{R^2 t} \right)^{0,5}, \quad (26a)$$

resp.

$$\sigma_{pr} = \left(\frac{144\ 000EP}{\pi D^2 t} \right)^{0,5} \doteq 379,5 \left(\frac{EP}{\pi D^2 t} \right)^{0,5} \doteq 214,1 \left(\frac{EP}{D^2 t} \right)^{0,5}, \quad (26b)$$

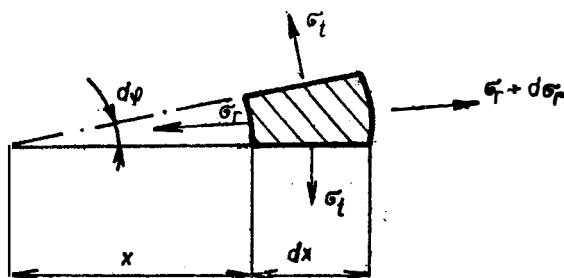
kde σ_{pr} je v MPa.

SLOŽITĚJŠÍ MODEL NAPJATOSTI V KRUHOVÉ DESCE

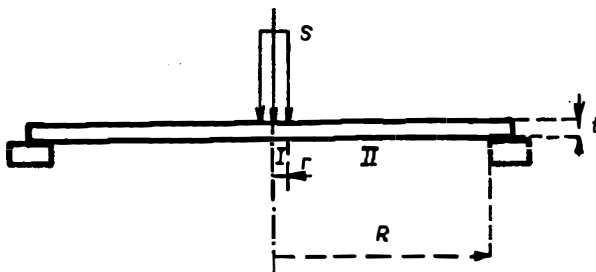
V kruhové desce dochází vzhledem k tomu, že se jedná o součást, kde tloušťka $t \ll R$, ke dvojosé napjatosti. Na element desky (obr. 1) vyjmutý dvěma blízkými kruhovými a radiálními řezy, který má tloušťku t , působí dvě hlavní napětí: tečné σ_t a radiální σ_r . Třetí napětí ve směru osy desky (na obr. 1 kolmo na papír),

Výpočet dynamické pevnosti v ohybu měřené nárazem na sklo

je ve srovnání se dvěma výše jmenovanými malé (srovnatelné s atmosférickým tlakem), a proto je zanedbáme. Pokusíme-li se tímto modelem řešit desku, na kterou působí osamělá síla S uprostřed, dojdeme podle [16] k závěru, že ve středu desky jsou obě napětí nekonečně velká. To se neshoduje se skutečností. Je to zdůvodněno tím, že v praxi žádná síla nemůže působit bodově, ale na určité malé plošce. Nechť poloměr této plošky je roven hodnotě r , která je mnohem menší



Obr. 1. Tvar elementu kruhové desky



Obr. 2. Schéma zatížení kruhové desky.

než vzdálenost podepřeného okraje desky od jejího středu ($r \ll R$). Deska je pak rozdělena na dvě oblasti. Pro $x \in \langle 0, r \rangle$ se předpokládá spojitě konstantní zatížení, jehož úhrnná velikost na plošce πr^2 dá právě hodnotu síly S . Ve vnější oblasti pro $x \in \langle r, R \rangle$ se pak již žádné vnější zatížení nepředpokládá. Pro takovouto desku (obr. 2) jsou průběhy napětí v obou oblastech dány vztahy [16]

$$\begin{aligned}
 x \in \langle 0, r \rangle: \sigma_r^I &= \frac{3}{8} \frac{S}{\pi t^2} \frac{m+1}{m} \left(4 \ln \frac{R}{r} + \frac{r^2}{R^2} - \frac{3m+1}{m+1} \cdot \frac{x^2}{r^2} \right) + \\
 &\quad + \frac{3}{4} \frac{S}{\pi t^2} \left(2 - \frac{r^2}{R^2} \right) \\
 \sigma_t^I &= \frac{3}{8} \frac{S}{\pi t^2} \frac{m+1}{m} \left(4 \ln \frac{R}{r} + \frac{r^2}{R^2} - \frac{m+3}{m+1} \cdot \frac{x^2}{r^2} \right) + \\
 &\quad + \frac{3}{4} \frac{S}{\pi t^2} \left(2 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (27)
 \end{aligned}$$

$$x \in \langle r, R \rangle: \sigma_r^{II} = \frac{3}{8} \frac{S}{\pi t^2} \frac{m+1}{m} \left(4 \ln \frac{R}{x} - \frac{4m}{m+1} + \frac{r^2}{R^2} + \frac{m-1}{m+1} \cdot \frac{r^2}{x^2} \right) +$$

Novotný, Vojtěch:

$$\begin{aligned} & + \frac{3}{4} \frac{S}{\pi t^2} \left(2 - \frac{r^2}{R^2} \right) \\ \sigma_t^{\text{II}} = & \frac{3}{8} \frac{S}{\pi t^2} \frac{m+1}{m} \left(4 \ln \frac{R}{x} - \frac{4}{m+1} + \frac{r^2}{R^2} - \frac{m-1}{m+1} \cdot \frac{r^2}{x^2} \right) + \\ & + \frac{3}{4} \frac{S}{\pi t^2} \left(2 - \frac{r^2}{R^2} \right), \end{aligned}$$

kde $m = 1/\mu =$ Poissonova konstanta,
 $\mu =$ Poissonovo číslo.

Protože se jedná o náhradu osamělé síly, je $r \ll R$ a tak lze provést některá zjednodušení:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{\text{I}} &= \frac{3}{8} \frac{S}{\pi t^2} \left[\frac{m+1}{m} \left(4 \ln \frac{R}{r} - \frac{3m+1}{m+1} \cdot \frac{x^2}{r^2} \right) + 4 \right] \\ \sigma_t^{\text{I}} &= \frac{3}{8} \frac{S}{\pi t^2} \left[\frac{m+1}{m} \left(4 \ln \frac{R}{r} - \frac{m+3}{m+1} \cdot \frac{x^2}{r^2} \right) + 4 \right] \\ \sigma_r^{\text{II}} &= \frac{3}{8} \frac{S}{\pi t^2} \left[\frac{m+1}{m} \left(4 \ln \frac{R}{x} + \frac{m-1}{m+1} \cdot \frac{r^2}{x^2} \right) \right] \\ \sigma_t^{\text{II}} &= \frac{3}{8} \frac{S}{\pi t^2} \left[\frac{m+1}{m} \left(4 \ln \frac{R}{x} - \frac{m-1}{m+1} \cdot \frac{r^2}{x^2} \right) + 4 - \frac{4}{m} \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Pro lepší přehlednost při výpočtu vyjádříme napětí (28) pomocí konstant A až G . Hodnoty těchto konstant vyplývají z porovnání (28) a (28a)

$$\begin{aligned} \sigma_r^{\text{I}} &= A - Bx^2, & \sigma_r^{\text{II}} &= D \ln \frac{R}{x} + \frac{F}{x^2}, \\ \sigma_t^{\text{I}} &= A - Cx^2, & \sigma_t^{\text{II}} &= D \ln \frac{R}{x} - \frac{F}{x^2} + G. \end{aligned} \quad (28a)$$

Dynamické napětí zjistíme jako v předchozích případech z rovnosti deformační energie Q akumulované v desce a potenciální energie koule před pádem.

Energie v desce na jednotku objemu je podle [17]

$$q = \frac{1}{2E} (\sigma_r^2 + \sigma_t^2 - 2\mu\sigma_r\sigma_t). \quad (29)$$

Protože je $r \ll R$, je i energie akumulovaná ve střední části desky omezené plochou πr^2 zanedbatelná oproti energii zbývající části, budeme tedy předpokládat $Q \doteq Q^{\text{II}}$. Vztahy (28) a (28a) ukazují závislosti obou napětí v radiálním směru. Ve skutečnosti je ještě každé z těchto napětí lineárně rozloženo po tloušťce desky s nulovou hodnotou uprostřed tloušťky t . Pro získání závislostí všech napětí na x a y je tedy nutné násobit všechny čtyři výrazy pro napětí (28), resp. (28a) členem $\frac{2}{t} \cdot y$.

Energii na jednotku objemu v části II získáme dosazením (28a) do (29) s uvažováním členu $\frac{2}{t} \cdot y$.

$$q^{\text{II}}(x, y) = \frac{2y^2}{Et^2} \left[2(1-\mu) D^2 \ln^2 \frac{R}{x} + 2(1-\mu) DG \ln \frac{R}{x} + \right.$$

Výpočet dynamické pevnosti v ohybu měřené nárazem na sklo

$$+ 2(1 + \mu) \frac{F^2}{x^4} - 2(1 + \mu) \frac{FG}{x^2} + G^2 \Big]. \quad (30)$$

Celkovou energii akumulovanou v části II, která podle uvedených předpokladů zároveň přibližně reprezentuje energii celé desky, získáme integrací posledního vztahu v mezích od $-t/2$ po $+t/2$ pro y , od 0 po 2π pro φ (žádné z napětí není na této souřadnici díky osové symetrii závislé) a od r po R pro x .

Tím dostáváme výraz pro energii (31)

$$Q = \frac{\pi t}{3E} \left[(1 - \mu) (D^2 + DG + G^2) \frac{R^2}{2} + 4(1 + \mu) \frac{F^2}{r^2} - 2(1 + \mu) FG \ln \frac{R}{r} \right]. \quad (31)$$

Ve vztahu (31) byly zanedbány malé členy vyplývající z podmínky $r \ll R$. Zde provedeme ještě poslední úpravu, a to zpětné dosazení za konstanty D , F a G . Tím máme konečný výraz pro energii akumulovanou v kruhové na okrajích podepřené desce tloušťky t zatížené uprostřed silou S rovnoměrně rozloženou na plošce, jejíž poloměr je roven hodnotě r :

$$Q = \frac{3}{8} \frac{S^2}{\pi t^3 E} (1 - \mu) \left[(3 + \mu) + \frac{r^2}{R^2} (1 - \mu^2) \left(\frac{1}{2} - \ln \frac{R}{r} \right) \right]. \quad (32)$$

Ve výrazu (32) nyní nahradíme sílu S výrazem obsahujícím maximální napětí. Toto maximální napětí je ve středu desky, tedy pro $x = 0$, a číselně je rovno konstantě A (viz (28a)), tedy

$$\sigma_{\max} = A = \frac{3}{2} \frac{S}{\pi t^2} \left[(1 + \mu) \ln \frac{R}{r} + 1 \right] \rightarrow S = \frac{2}{3} \pi t^2 \frac{\sigma_{\max}}{(1 + \mu) \ln \frac{R}{r} + 1}. \quad (33)$$

Dosazením do (32) a vyjádřením σ_{\max} dostáváme vztah pro maximální dynamické napětí v desce:

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{6QE \left[(1 + \mu) \ln \frac{R}{r} + 1 \right]^2}{\pi t R^2 \left[(3 + \mu) + \frac{r^2}{R^2} (1 - \mu^2) \left(\frac{1}{2} - \ln \frac{R}{r} \right) \right] (1 - \mu)}}. \quad (34)$$

V posledním vztahu pro σ_{\max} nahradíme $\pi R^2 t$ symbolem V pro objem, dále na základě předpokladu rovnosti deformační energie desky a energie dopadající koule symbol Q symbolem P a konečně provedeme zanedbání členu

$$\frac{r^2}{R^2} (1 - \mu^2) \left(\frac{1}{2} - \ln \frac{R}{r} \right) \quad \text{oproti} \quad (3 + \mu),$$

neboť $r \ll R$.

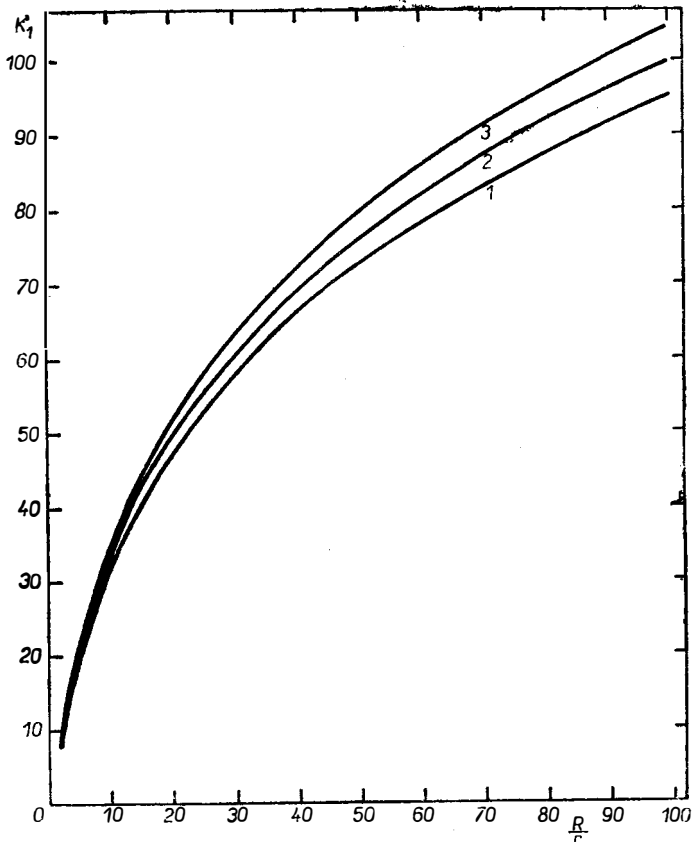
Tím máme konečný výraz pro maximální dynamické namáhání desky, který je strukturou obdobný výrazu (25):

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{6EP \left[(1 + \mu) \ln \frac{R}{r} + 1 \right]^2}{V(1 - \mu)(3 + \mu)}} = \sqrt{\frac{K \cdot EP}{V}}. \quad (35)$$

Výraz (35) je oproti (25) složitější. Kromě rozměrového členu PE/V obsahuje navíc konstantu, jejíž velikost je závislá na poměru R/r a Poissonově čísle materiálu desky μ (pro sklo v rozmezí 0.18 až 0.22).

Ve výpočtu byla provedena některá zanedbání. Chyba z toho vzniklá se zvětšuje se zmenšujícím se poměrem R/r . Pro běžné rozměry (tj. např. $R/r = 33$ — deska tloušťky 3 mm o poloměru 100 mm) obnáší tato chyba méně než 2,5 % vzhledem k napětí určenému bez zanedbávání. Z toho asi 1/5 připadá na chybu zanedbáním energie Q^I a zbylé 4/5 na zanedbání poměrů R/r a násobků r v součtech. Uvedený výpočet je na straně bezpečnosti, neboť skutečné napětí bude nižší, a to jednak z důvodu uvedených zanedbání a dále proto, že v praxi nedojde k úplné přeměně potenciální energie koule na energii deformační a lomovou (změna v teplo, pružný odraz, atd.).

Hodnoty konstanty K_1 z výrazu (35) jsou pro poměr $\frac{R}{r} = 2$ až 100 a $\mu = 0,18$ až 0,22 vyčísleny v tab. I a vyneseny do grafu na obr. 3.



Obr. 3. Závislost konstanty K_1 vztahu (35) na poměru $\frac{R}{r}$.

R — vzdálenost podepřeného okraje od středu kruhové desky,
 r — poloměr plošky se spojitým konstantním zatížením,
 1 — $\mu = 0,18$; 2 — $\mu = 0,20$; 3 — $\mu = 0,22$.

Výpočet dynamické pevnosti v ohybu měřené nárazem na sklo

Tabulka I

Hodnoty konstanty K_1 vztahu (35) pro kruhovou desku v závislosti na poměru R/r

$\frac{R}{r}$	K_1		
	$\mu = 0,18$	$\mu = 0,20$	$\mu = 0,22$
100	95,3	99,8	104,6
90	91,6	96,0	100,6
80	87,6	91,8	96,2
70	83,2	87,2	91,3
60	78,2	82,0	85,9
50	72,6	76,0	79,6
40	65,9	69,0	72,3
30	57,8	60,5	63,3
20	47,3	49,5	51,8
15	40,5	43,2	44,2
10	31,8	33,2	34,7
7,5	26,2	27,4	28,6
5	19,3	20,1	21,0
3	12,1	12,6	13,1
2	7,6	7,9	8,1

Z předchozích výpočtů je zřejmé, že klíčovým problémem pro určení konstanty K_1 z výrazu (31) je zadání poloměru r plošky, na níž se předpokládá spojitě konstantní zatížení. Doporučovány jsou následující možnosti:

a) $r = t$.

Poloměr plošky, na kterou působí dopadající koule je rovna tloušťce desky [16].

b) $r = 0,025R$.

Průměr plošky je roven $\frac{1}{40}$ průměru vzdálenosti podepřeného okraje od středu desky [18].

c) $r = 0,5(0,1d_k + 1,5t)$,

kde d_k je průměr dopadající koule. Tak hodnota r byla získána konzultací s Ing. Hendrychem ze Stavebního ústavu ČVÚT Praha [20] a bere v úvahu vliv elastické deformace koule a desky při dopadu.

Případ b), tj. předpoklad $r = 0,025R$ reprezentuje v tabulce I řádek $\frac{R}{r} = 40$.

V SVÚS Hradec Králové byly prováděny zkoušky kruhových desek průměru 51 až 52 mm, tloušťky 1,1 až 2,0 mm a vzorků průměru 71 mm, tloušťky 1,3 až 1,6 mm. Vnitřní poloměr kroužku R , na němž byly vzorky vloženy, byl ve shodě s příslušnými normami roven 12,7 mm, průměr použité ocelové koule 15,9 mm [7÷9]. Pro tyto hodnoty typické pro normované zkoušky brýlových protislunečních a ochranných skel jsme vypočetli hodnotu konstanty K_1 vztahu (35) pro 3 uvedené metody a) až c). Výsledky jsou v tabulce II.

Po dosažení hodnot K_1 z tab. II do vztahu (35) dynamická pevnost v ohybu σ_{Df} je nejvyšší podle metody b), a to o 35 až 42 % proti hodnotě z jednoduchého vztahu (25), o 54 až 78 % proti metodě a) a o 34 až 69 % proti metodě c). Metoda c) dává

Tabulka II

Hodnoty konstanty K_1 vztahu (35) pro kruhovou desku o $R = 12,7$ mm a kouli průměru $d_k = 15,9$ mm

	Tloušťka t (mm)						
	μ	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
Metoda a $r = t$	0,18	27,9	26,2	24,6	23,3	22,1	20,9
	0,20	29,1	27,3	25,7	24,3	23,0	21,8
	0,22	30,4	28,5	26,8	25,3	24,0	22,7
Metoda b $r = 0,025R$	0,18			65,9			
	0,20			69,0			
	0,22			72,3			
Metoda c $r = \frac{0,1d_k + 1,5t}{2}$	0,18	36,8	33,0	29,9	27,3	25,1	23,3
	0,20	38,4	34,4	31,2	28,5	26,3	24,3
	0,22	40,2	35,9	32,5	29,7	27,4	25,3

hodnoty σ_{pr} vyšší než metoda a) o 6 až 15 %. Hodnoty σ_{pr} vypočtené podle nejjednoduššího vztahu (25) se liší od metody a) o +14 až +31 % (pro nejběžnější $\mu = 0,22$ o +9 až +31 %), od metody b) o -26 až -29 %, od metody c) o +24 až -5 % (pro nejběžnější $\mu = 0,22$ od +19 až -5 %).

NÁRAZ KOULÍ NA ČTVERCOVOU DESKU

Zkouška se se provádí obdobně jako při nárazu koulí na kruhovou desku, rozdíl je pouze ve tvaru desky a ve tvaru rámu, které jsou čtvercové.

Tato metoda se používá ke zkoušení vzorků plochých bezpečnostních skel pro dopravní prostředky a je obsažena v příslušných čs. i zahraničních normách. Vzorky bezpečnostních skel pro dopravní prostředky mají podle těchto norem (např. ČSN 70 0592 [11]) předepsaný plošný rozměr 300×300 mm, dřevěný rám vnitřní hranu délky 260 mm, a ocelová koule hmotnost 227 ± 2 g (průměr 38 mm) nebo hmotnost 2260 ± 20 g (průměr 82 mm). V některých zahraničních normách je předepsána koule hmotnosti 758 g (průměr 57 mm) [12] příp. 800 g (průměr 58 mm) [13]. (Při některých normovaných zkouškách dopadá na střed vzorku ocelový šíp hmotnosti 198 až 200 g, mající v místě nárazu na sklo kuličku \varnothing 3 až 4 mm [14].)

Pevnost v nárazu se vypočte z výše uvedeného vztahu (16).

Odvození vztahu pro výpočet σ_{pr} z jednoduššího modelu napjatosti v čtvercové desce

Dynamickou pevnost v ohybu σ_{pr} jsme odvodili obdobným způsobem jako v předcházejícím odstavci:

Napětí v desce po nárazu — σ — jsme vyjádřili pomocí maximální hodnoty σ_m ve středu desky. Vyšli jsme z předpokladu, že napětí σ klesá lineárně s rostoucí

Výpočet dynamické pevnosti v ohybu měřené nárazem na sklo

vzdáleností x od středu k podepřenému obvodu — od σ_m ve středu ($x = 0$) až po $\sigma(x) = 0$ pro $x = \frac{a}{2}$, kde $\frac{a}{2}$ = vzdálenost podepřeného obvodu od středu vzorku; a = délka vnitřní strany podpírajícího rámu. Současně klesá napětí lineárně v každé vzdálenosti x ve směru kolmém na povrch, stejně jako v předcházejícím případě kruhové desky. Napětí $\sigma(x, y)$ lze tedy vyjádřit vztahem

$$\sigma(x, y) = \frac{\frac{a}{2} - x}{\frac{a}{2}} \frac{y}{\frac{t}{2}} \sigma_m. \quad (36)$$

Vzhledem k tomu, že napětí je symetricky rozloženo kolem středu desky, vyjádříme výhodně prvek objemu vztahem:

$$dV = 8x \, dx \, dy. \quad (37)$$

Dosazením do vztahu (19) dostaneme pro energii v prvku objemu dV

$$dQ = \frac{64x\sigma_m^2}{Ea^2t^2} \left[\left(\frac{a}{2} - x \right)^2 y^2 \, dx \, dy \right]. \quad (38)$$

Celková energie desky je tedy:

$$Q = 2 \frac{64x\sigma_m^2}{Ea^2t^2} \int_{y=0}^{\frac{t}{2}} \int_{x=0}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{a}{2} - x \right)^2 y^2 \, dx \, dy, \quad (39)$$

$$Q = \frac{a^2t}{36E} \sigma_m^2 = \frac{V}{36E} \sigma_m^2, \quad (40)$$

kde V = objem desky uvnitř rámu.

Dynamická pevnost v ohybu $\sigma_{pr} = \sigma_m$. Stejně jako v předcházejících případech zjednodušeně předpokládáme, že $Q = P$.

Dynamickou pevnost v ohybu lze pak vyjádřit vztahem

$$\sigma_{pr} = \left(\frac{36EP}{a^2t} \right)^{0,5} = \left(\frac{36EP}{V} \right)^{0,5}. \quad (41)$$

Dosazujeme-li jednotlivé hodnoty v běžně používaných jednotkách jako ve vztahu (5) a (9), hodnotu P v J, hodnotu a i t v mm, dostaneme tvar vhodný k výpočtu:

$$\sigma_{pr} = \left(\frac{36\,000EP}{a^2t} \right)^{0,5} \doteq 189,7 \left(\frac{EP}{a^2t} \right)^{0,5}, \quad (42)$$

kde σ_{pr} je v MPa.

SLOŽITĚJŠÍ MODEL NAPJATOSTI VE ČTVERCOVÉ, RESP. OBDÉLNÍKOVÉ DESCE

V desce obdélníkového nebo i čtvercového tvaru je situace v rozložení napjatosti mnohem složitější než v desce kruhové. Podle [17] je průhyb w obdélníkové desky popsán diferenciální rovnicí

Novotný, Vojtěch:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (43)$$

kde $q(x, y)$ je příčné zatížení desky a D je její ohybová tuhost,

$$D = \frac{E}{1 - \mu^2} \frac{t^3}{12}. \quad (44)$$

Výše uvedená rovnice má řešení v uzavřeném tvaru pouze pro některé typy zatížení. Mezi ně patří i tzv. Navierovo řešení pro případ obdélníkové desky rozměrů a a b o tloušťce t , kde zatížení $q(x, y)$ je sinusovou funkcí souřadnic x a y . (V našem případě a a b je délka a šířka vnitřní části podpírajícího rámu).

Podobně jako u kruhové desky by předpoklad bodového zatížení dopadající kouli vedl na nekonečně velká napětí. Proto se i zde omezíme na malou plošku o rozměrech a_1, b_1 , které jsou srovnatelné s tloušťkou desky, a to tak, že vně této plošky je zatížení nulové a uvnitř konstantní, rovné hodnotě q_0 . Abychom vyhověli předpokladům Navierova řešení, provedeme rozvoj funkce

$$q(x, y) = q_0 \quad \text{pro } x \in \left\langle \frac{a}{2} - \frac{a_1}{2}, \frac{a}{2} + \frac{a_1}{2} \right\rangle, \quad y \in \left\langle \frac{b}{2} - \frac{b_1}{2}, \frac{b}{2} + \frac{b_1}{2} \right\rangle, \quad (45)$$

$$q(x, y) = 0 \quad \text{pro zbytek desky}$$

do dvojné Fourierovy řady typu

$$q(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \cdot \sin \frac{\pi m x}{a} \cdot \sin \frac{\pi n y}{b}, \quad (46)$$

kde A_{mn} jsou konstanty u jednotlivých členů.

Podle pravidel pro výpočet koeficientů Fourierovy řady určíme hodnoty koeficientů A_{mn} :

$$A_{mn} = \frac{4q_0}{ab} \int_{\frac{a}{2} - \frac{a_1}{2}}^{\frac{a}{2} + \frac{a_1}{2}} \sin \frac{\pi m x}{a} dx \int_{\frac{b}{2} - \frac{b_1}{2}}^{\frac{b}{2} + \frac{b_1}{2}} \sin \frac{\pi n y}{b} dy =$$

$$= \frac{16q_0}{\pi^2 m n} \cdot \sin \frac{\pi m a_1}{2a} \cdot \sin \frac{\pi n b_1}{2b} \cdot \sin \frac{\pi m}{2} \cdot \sin \frac{\pi n}{2}. \quad (47)$$

A protože $\sin \frac{\pi n}{2}$, resp. $\sin \frac{\pi m}{2}$ je pro sudé hodnoty m a n nulový, stačí ve Fourierově řadě brát jen liché členy, tj.

$$A_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^2 m n} \cdot \sin \frac{\pi m a_1}{2a} \cdot \sin \frac{\pi n b_1}{2b}, \quad m, n = 1, 3, 5, \dots \quad (48)$$

průhyb desky hledáme ve stejném tvaru jako funkci $q(x, y)$, ale tak, aby splňoval diferenciální rovnici platnou pro desky. Podle Navierova řešení [17] dostáváme funkci

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{A_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \cdot \sin \frac{\pi m x}{a} \cdot \sin \frac{\pi n y}{b}. \quad (49)$$

Další postup bude obdobný jako u kruhové desky, tj. nejprve vyjádříme hodnotu deformační energie Q akumulované v desce s průhybem popsaným funkcí $w(x, y)$. Ve výrazu pro energii se bude vyskytovat konstanta q_0 , jejíž hodnotu neznáme. Proto dále provedeme vyjádření maximálního napětí, pomocí kterého konstantu q_0 z výrazu pro energii vyloučíme. V závěru ještě položíme energii Q akumulovanou v desce rovnou energii dopadající koule P a výraz pro napětí upravíme do tvaru obdobného výrazu (35).

Energie v desce je podle [17]

$$Q = D \iint \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (1 - \mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (50)$$

s využitím (49) máme

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{A_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \frac{\pi^2 m^2}{a^2} \cdot \sin \frac{\pi m x}{a} \cdot \sin \frac{\pi n y}{b}, \quad (51)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{A_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \frac{\pi^2 n^2}{b^2} \cdot \sin \frac{\pi m x}{a} \cdot \sin \frac{\pi n y}{b}, \quad (52)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{A_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \frac{\pi^2 m n}{ab} \cos \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{b}, \quad (53)$$

$$Q = D \iint \left[\frac{1}{2} \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \sum_{i=1,3}^{\infty} \sum_{j=1,3}^{\infty} \frac{A_{mn} A_{ij} \pi^4 m^2 i^2 \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b} \cdot \sin \frac{\pi i x}{a} \sin \frac{\pi j y}{b}}{a^4 \pi^8 D^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \sum_{i=1,3}^{\infty} \sum_{j=1,3}^{\infty} \frac{A_{mn} A_{ij} \pi^4 n^2 j^2 \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b} \cdot \sin \frac{\pi i x}{a} \sin \frac{\pi j y}{b}}{b^4 \pi^8 D^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)^2} + \right. \\ \left. + \mu \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \sum_{i=1,3}^{\infty} \sum_{j=1,3}^{\infty} \frac{A_{mn} \cdot A_{ij} \pi^4 m^2 j^2 \sin \frac{\pi m x}{a} \cdot \sin \frac{\pi n y}{b} \cdot \sin \frac{\pi i x}{a} \cdot \sin \frac{\pi j y}{b}}{a^2 b^2 \pi^8 D^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)^2} + \right. \\ \left. + (1 - \mu) \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \sum_{i=1,3}^{\infty} \sum_{j=1,3}^{\infty} \right]$$

$$A_{mn} A_{ij} \pi^4 m n i j \cos \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{b} \cos \frac{\pi i x}{a} \cos \frac{\pi j y}{b} \left. \right] dx dy, \quad (54)$$

$$a^2 b^2 \pi^8 D^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)^2$$

kde x se integruje v mezích $\langle 0, a \rangle$ a y v mezích $\langle 0, b \rangle$.

Po úpravách dojdeme ke vztahu (55), kde A_{mn} je dáno rovnicí (48) a D rovnicí (44)

$$Q = \frac{ab}{4\pi^4 D} \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{A_{mn}^2}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}. \quad (55)$$

Maximální redukované namáhání je ve středu desky, a to ve směru y , za předpokladu, že $a > b$, rovno napětí σ_y , jelikož třetí napětí $\sigma_z = q_0 = 0 \ll \sigma_y$.

Podle [17] je

$$\sigma_y = \sigma_{\max} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}} \quad (56)$$

a po úpravě

$$\sigma_{\max} = \frac{6\pi^2}{t^2 \pi^4} \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{A_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \left(\frac{n^2}{b^2} + \mu \frac{m^2}{a^2} \right). \quad (57)$$

Porovnáním výrazů (55) a (57) vyloučíme q_0 (je obsaženo v konstantách A_{mn}) Označíme-li dále poměr $a/b = \eta$, máme konečný výraz pro maximální dynamické namáhání ve středu obdélníkové desky rozměrů a a b , tloušťky t :

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{12PE}{(1-\mu^2)V} \left[\sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\pi m a_1}{2a} \cdot \sin^2 \frac{\pi n b_1}{2b}}{m^2 n^2 \left(\frac{m^2}{\eta^2} + n^2 \right)^2} \right]^{-1} \cdot \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi m a_1}{2a} \cdot \sin \frac{\pi n b_1}{2b}}{m n \left(\frac{m^2}{\eta^2} + n^2 \right)^2} \left(n^2 + \mu \frac{m^2}{\eta^2} \right)}, \quad (58)$$

kde P — energie dopadající koule — podle předpokladu rovná deformační energii akumulované v desce (Q),

V — objem desky, $V = a \cdot b \cdot t$,

E — modul pružnosti materiálu desky,

μ — Poissonovo číslo.

Výraz (58) máme tvar obdobný (35), tedy

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{K_2 \cdot EP}{V}}, \quad (59)$$

kde K_2 — konstanta, jejíž hodnota vyplývá z porovnání vztahů (58) a (59).

Výpočet dynamické pevnosti v ohybu měřené nárazem na sklo

Výpočet konstanty K_2 je pro jeho složitost nutné svěřit počítači. Podobně jako v případě kruhové desky i zde je problematické určení velikosti plošky, na níž se předpokládá spojitě konstantní zatížení. Použili jsme podobné možnosti jako u kruhové desky:

a) $a_1 = b_1 = 2t$ — Ploška má tvar čtverce o straně rovné dvojnásobku tloušťky desky.

b) $\frac{a_1}{a} = 0,025$; $a_1 = b_1$ — Ploška má tvar čtverce o straně a_1 , která je 1/40 delší strany desky.

c) $a_1 = 0,1d_k + 1,5t$ — Ploška má tvar čtverce o straně a_1 , jejíž délka závisí na průměru koule d_k i na tloušťce desky t .

Tabulka III

Hodnoty konstanty K_2 vztahu (59) pro čtvercovou a obdélníkovou desku, určené metodou a ($a_1 = b_1 = 2t$), resp. b ($\frac{a}{a_1} = \frac{a}{t} = 40$)

Poměr vnitřních stran rámu $\frac{a}{b}$	Poměr $\frac{a}{t}$ μ	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
		1,0	0,18 0,20 0,22	18,4 19,2 20,0	28,2 29,4 30,6	35,0 36,5 38,1	40,9 42,6 44,4	45,6 47,5 49,6	49,2 51,3 53,5	51,8 54,0 56,3	53,8 56,1 58,4
1,5	0,18 0,20 0,22	20,6 21,4 22,1	31,4 32,5 33,7	39,0 40,4 41,9	44,9 46,6 48,4	50,2 52,1 54,1	54,8 56,9 59,1	58,6 60,8 63,1	61,6 63,9 66,4	64,0 66,4 69,0	65,9 68,4 71,0
2,0	0,18 0,20 0,22	22,9 23,7 24,4	35,2 36,4 37,7	44,1 45,6 47,2	51,1 53,0 54,9	56,9 59,0 61,2	62,0 64,3 66,7	66,6 69,0 71,6	70,5 73,1 75,8	73,8 76,5 79,3	76,6 79,3 82,2

Výsledné hodnoty konstanty K_2 pro předpoklady a), b) jsou uvedeny v tabulce III. Výpočet byl proveden pro 100 členů každé složky dvojné Fourierovy řady, což je pro uvažované poměry $\frac{a}{a_1}$ dostačující. Pro větší poměry $\frac{a}{a_1}$ (např. 1000) by byl třeba brát v úvahu větší počet členů řady tak, aby Fourierův rozvoj funkce $q(x, y)$ mohl dostatečně dobře aproximovat skokovou změnu zatížení z 0 na q_0 na ploše $a_1 b_1$.

Předpoklad b) je v tab. III reprezentován řádky pro $a/a_1 = a/t = 40$.

Výsledky získané pomocí přístupu c) pro desky zkoušené ve SVÚS, včetně desek pro zkoušky podle ČSN 70 0592 [11], jsou shrnuty v tabulce IV.

Ze složitějšího modelu rovinné napjatosti, tj. z hodnot K_1 a K_2 v tab. I a III vyplývá, že čtvercová deska srovnatelných rozměrů s kruhovou deskou je cca o $\frac{1}{4}$ odolnější proti nárazu, tj. při stejné energii nárazu je vzniklé maximální napětí ve čtvercové desce o cca $\frac{1}{4}$ nižší — pravděpodobně se projevuje vyztužující

Tabulka IV

Hodnoty konstanty K_2 vztahu (59) pro čtvercovou desku, určené metodou c
($\alpha_1 = 0,1d_k + 1,5t$)

Vnitřní strana rámu a (mm)	\varnothing koule d_k (mm)	Poměr $\frac{a}{t}$ μ	20	30	40	50	60	70	80	90
			88	29	0,18 0,20 0,22	17,5 18,2 19,0	20,8 21,7 22,6	23,1 24,0 25,1	24,7 25,7 26,8	25,9 27,0 28,2
185	29	0,18 0,20 0,22	19,7 20,5 21,4	24,1 25,1 26,2	27,2 28,4 29,6	29,6 30,8 32,2	31,5 32,8 34,2	33,1 34,5 35,9	34,4 35,9 37,4	35,6 37,1 38,7
185	38	0,18 0,20 0,22	19,0 19,8 20,6	23,0 24,0 25,0	25,9 27,0 28,2	28,0 29,2 30,4	29,6 30,9 32,2	30,9 32,3 33,6	32,1 33,4 34,8	33,0 34,4 35,9
260	38	0,18 0,20 0,22	19,8 20,6 21,5	24,3 25,3 26,4	27,5 28,7 29,9	30,0 31,2 32,6	31,9 33,3 34,7	33,6 35,0 36,5	35,0 36,5 38,0	36,3 37,8 39,4

účinek rohů. U obdélníkové desky je pevnost ve srovnání s čtvercovou mírně nižší, při stejné energii nárazu je maximální napětí v obdélníkové desce o 5 až 14 % nižší, než ve srovnatelné čtvercové desce. Napětí v desce se dále úměrně zvětšuje s rostoucím μ (při zvýšení z $\mu = 0,18$ na $0,22$ o cca 4 %).

Provedli jsme porovnání výsledků získaných metodou a) až c) pro obvyklé zkušební podmínky včetně normovaných [11], tj.

1. při tloušťce skla 1 až 2 mm pro rám 88×88 mm, kouli $\varnothing 29$ mm,
2. při tloušťce skla 2 až 3 mm pro rám 185×185 mm, kouli $\varnothing 29$ mm,
3. při tloušťce skla 3 až 6 mm pro rám 185×185 mm, kouli $\varnothing 38$ mm,
4. při tloušťce skla 3 až 9 mm pro rám 260×260 mm, kouli $\varnothing 38$ mm.

Z porovnání vyplynulo, že po dosažení K_2 z tab. III a IV do vztahu (59) dynamická pevnost v ohybu σ_{pr} je nejvyšší podle metody a) resp. b), a to až o +29 %, resp. +10 % proti hodnotě z jednoduchého vztahu (41). Metoda c) dává hodnoty převážně nižší než vychází z jednoduchého vztahu (41), a to v rozsahu od -19 % do +4 % (pro nejběžnější $\mu = 0,22$ od -17 % do +4 %).

Vypočtené maximální napětí závisí podstatně — obdobně jako u složitějšího modelu rovinné napjatosti kruhové desky — na volbě velikosti plošky, na níž se předpokládá spojitě konstantní zatížení. Jakou plošku je oprávněné použít při výpočtu by bylo třeba zjistit vhodně uspořádanými experimenty. Pokud tyto experimentální práce nebudou provedeny, vzorec (35) pro kruhovou desku a (58) pro čtvercovou, resp. obdélníkovou desku neumožňují určit přesnou hodnotu maximálního napětí σ_{gr} . Vzhledem k této skutečnosti a tomu, že hodnoty maximálního napětí určené ze vzorců (35) a (58) metodami a) až c) kolísají kolem hod-

noty zkoumané výpočtem z nejjednoduššího vztahu (25) a (41) je v současné době výhodné používat k výpočtu σ_{pr} v kruhové i čtvercové desce pro obvyklé zkušební podmínky vztah (25, 26) a (41, 42).

ZÁVĚR

Článek pojednává o výpočtu dynamické pevnosti v ohybu σ_{pr} (tj. maximálního napětí při měření pevnosti v nárazu), pro tělesa různých, pravidelných tvarů.

V první části článku jsme shrnuli údaje uváděné v literatuře pro náraz kyvadlovým kladivem podle Charpyho na trámeček obdélníkového, resp. čtvercového průřezu a váleček (tyčinku) a rozšířili je o náraz na trámeček tvaru rovnoramenného trojúhelníka, šestiúhelníka a trubky.

V druhé části článku jsme odvodili rovnice pro výpočet dynamické pevnosti v ohybu σ_{pr} při nárazu koulí na střed tabule, podepřené v blízkosti okrajů, tvaru 1. kruhu, 2. čtverce, příp. obdélníka. V obou případech jsme provedli odvození jak podle jednoduššího, tak podle složitějšího modelu napjatosti. Při výpočtu σ_{pr} ze vztahů (35) a (58) odvozených ze složitějšího modelu napjatosti závisí výsledky podstatně na volbě velikosti plošky, na níž se předpokládá spojitě konstantní zatížení. Velikost plošky, jakou je třeba použít při výpočtech, není známa a bylo by ji třeba určit experimentálně. Pokud tyto experimentální práce nebudou provedeny, je výhodné používat k výpočtu vztahy odvozené z jednoduššího modelu — pro kruhovou desku vztah (25), pro čtvercovou desku vztah (41). Tyto vztahy byly upraveny pro dosazování jednotlivých hodnot v běžně užívaných jednotkách, takže konečný vztah vhodný k výpočtu pro kruhovou desku je (26), pro čtvercovou desku (42).

Literatura

- [1] Šašek L. a kol.: *Laboratorní metody v oboru silikátů*, str. 167—169. SNTL Praha 1981.
- [2] *Sklářské praktikum*. SNTL, Praha 1990.
- [3] Novotný V.: *Zpevnování skla*, str. 105—109. SNTL, Praha 1972.
- [4] Preston F. W.: *J. Amer. Cer. Soc.* **14**, 428 (1931).
- [5] Menčík J.: *Sklář a keramik* **33**, 33 (1983).
- [6] Horák Z.: *Základy technické fyziky*, str. 237. Práce, Praha 1954.
- [7] ČSN 70 1540. Bezpečnostní sklo vrstvené brýlové, 1964.
- [8] Vyhláška ministerstva zdraví a výchovy USA: Použití nárazuvzdorných čoček v brýlích a protislunečních brýlích. Fed. reg. 70-13227. 1. 10. 1970.
- [9] DIN 52301. Sicherheitsglas für Augenschutzgläser, 1947.
- [10] PN Zorníková skla tvarovaná (zpevněná), 1983.
- [11] ČSN 70 0592. Bezpečnostní sklo pro automobily, traktory a zemědělské stroje, 1980.
- [12] DIN 52 306. Kugelfallversuch an Sicherheitsglas, 1960.
- [13] GOST 5727-57. Stěklo ploskoje bezopasnoje Stalinit, 1957.
- [14] ASA Z 261 — 1966. Safety glazing materials for glazing motor vehicles operating on land highways, 1966.
- [15] ČSN 70 0593. Zkoušení bezpečnostního skla vrstveného, 1962.
- [16] Bažant Z., Nedoma A., Spála K.: *Nauka o pružnosti a pevnosti*, str. 393—394, 387. Praha, Vědecko-technické nakladatelství 1950.
- [17] Šubrt L.: *Teorie desek a skořepin*, skriptum ČVUT, Praha 1981.
- [18] Bareš R.: *Tabulky pro výpočet desek a stěn*, 2. vyd. SNTL, Praha 1979.
- [19] Koloušek V. a kol.: *Stavebné konstrukce namáhané dynamickými účinkami*, SVTL, Bratislava 1967.
- [20] Henrych J. (Stavební ústav ČVUT Praha): Soukromé sdělení, 1989.